Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 12	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 46. Es sei S eine erststufige Sprache und es sei $\mathcal{F}_+$ die kleinste Klasse von S-Formeln, die alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktionen und $\forall$-Quantifikation abgeschlossen ist.

(1) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für zwei S-Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ eine eindeutig bestimmte S-Struktur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ mit folgenden Eigenschaften existiert.

   (a) Das kartesische Produkt $|\mathcal{A}| \times |\mathcal{B}|$ der Trägermengen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist die Trägermenge von $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

   (b) Ist φ eine Formel in $\mathcal{F}_+$ mit $free(\varphi) \subseteq \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$, so gilt

$$\mathcal{A}\times\mathcal{B} \models \varphi[(x_0, y_0), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1})]$$
$$\iff \mathcal{A} \models \varphi[x_0, \ldots, x_{n-1}] \text{ } \mathit{und} \text{ } \mathcal{B} \models \varphi[y_0, \ldots, y_{n-1}]$$

   für alle $x_0, \ldots, x_{n-1} \in |\mathcal{A}|$ und $y_0, \ldots, y_{n-1} \in |\mathcal{B}|$.

   Wir nennen die Struktur $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ das Produkt von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.

(2) (1 Punkt) Folgern Sie, dass das Produkt von zwei Gruppen eine Gruppe ist.

Aufgabe 47 (2 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{L}_R = \{0, 1, +, \cdot\}$ die Sprache der Ringtheorie. Formen Sie die Formel

$$\forall x \ [\forall y \ x + y = y \ \leftrightarrow \ \neg\exists y \ x \cdot y = 1]$$

in pränexe Normalform um.

Aufgabe 48. Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

(1) (1 Punkte) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \to \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \to \neg\varphi}$

(2) (2 Punkte) $\dfrac{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi \to \psi \\ \Gamma & \varphi \to \neg\psi\end{array}}{\Gamma \quad \neg\varphi}$

(3) (2 Punkte) $\dfrac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi) \to \xi}{\Gamma \quad \varphi \to (\psi \to \xi)}$

Aufgabe 49 (2 Punkte)**.** Es sei S eine erststufige Sprache, $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen und Φ eine Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Ist Ψ eine endliche Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert, so existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

Aufgabe 50 (4 Punkte)**.** Es sei N eine natürliche Zahl. Konstruieren Sie einen Körper K mit folgenden Eigenschaften.

(1) Jedes Polynom in $K[X]$ vom Grad $\leq N$ besitzt eine Nullstelle in K.

(2) K ist nicht algebraisch abgeschlossen.

(Tipp: *Es sei* $\bar{\mathbb{Q}}$ *ein algebraischer Abschluss von* $\mathbb{Q}$*. Wählen Sie eine geeignete Surjektion* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *und konstruieren Sie eine Sequenz* $\langle (K_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $K_0 = \mathbb{Q}$.

(2) $a_n : \mathbb{N} \to K_n^N$ *ist eine Surjektion.*

(3) *Gilt* $b(n) = (m_0, m_1)$ *mit* $m_0 \leq n$, $a_{m_0}(m_1) = (c_0, \ldots, c_{N-1})$ *und ist* $\{x_0, \ldots, x_{N-1}\}$ *die Menge der Nullstellen des Polynoms*

$$f(X) = X^N + c_{N-1} \cdot X^{N-1} + \cdots + c_1 \cdot X + c_0 \in K_{m_0}[X]$$

in $\bar{\mathbb{Q}}$*, so gilt* $K_{n+1} = K_n(x_0, \ldots, x_{N-1})$.

Betrachten Sie $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ *und das irreduzible Polynom* $g(X) = X^p - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ *für eine Primzahl* $p > N$*. Verwenden Sie die Multiplikativität der Körpergrade endlicher Körpererweiterungen).*

Aufgabe 51 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist. (Tipp: *Verwenden Sie die Aufgaben 49 und 50*).

Abgabe: Montag, 18. Juli 2016, in der Vorlesung.