## Einführung in die Mathematische Logik
## Sommersemester 2016

| | |
|---|---|
| Übungsaufgaben | Prof. Dr. Peter Koepke |
| Serie 11 | Dr. Philipp Lücke |

**Aufgabe 41.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Formeln in der Sprache $\{\in\}$.

(1) (2 Punkte) Es gibt keine Formel $\theta(x,y)$, so dass $\mathsf{ST}$ für alle Formeln $\varphi(x)$, $\psi(y)$ beweist, dass

$$\theta(\ulcorner\varphi\urcorner,\ulcorner\psi\urcorner) \Leftrightarrow \{z \mid \varphi(x)\} = \{z \mid \psi(z)\}.$$

(2) (2 Punkte) Es gibt keine Formel $\theta(x)$, so dass $\mathsf{ST}$ für alle Formeln $\varphi(x)$ beweist, dass

$$\theta(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \exists u\ (u = \{z \mid \varphi(z)\}).$$

**Aufgabe 42** (4 Punkte)**.** Es es $S$ eine erststufige Sprache, die ein zweistelliges Relationssymbol $\lhd$ enthält, und $\Phi$ eine Menge von $S$-Sätzen, so dass $(|\mathfrak{M}|, \lhd^{\mathfrak{M}})$ für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von $\Phi$ eine lineare Ordnung ist. Beweisen Sie, dass für jedes unendliche Modell $\mathfrak{M}$ von $\Phi$ ein $S$-Modell $\mathfrak{N}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert.

(1) Es existiert eine ordnungserhaltende Einbettung von $(\mathbb{Q},<)$ nach $(|\mathfrak{N}|, \lhd^{\mathfrak{N}})$.
(2) Es existiert eine elementare Einbettung von $\mathfrak{M}$ nach $\mathfrak{N}$.

(Tipp: *Erweitern Sie zunächst $S$ um Konstantensymbole für Elemente von $|\mathfrak{M}|$ und betrachten Sie die Theorie von $\mathfrak{M}$ in der erweiterten Sprache. Verwenden Sie dann den Kompaktheitssatz*).

**Aufgabe 43.** Zeigen Sie, dass die Beweisbarkeitsrelation $pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\cdot\urcorner)$ die sogenannten *Löb-Axiome* erfüllt:

(1) (2 Punkte) Wenn $\mathrm{ST} \vdash \varphi$ für eine $\in$-Formel $\varphi$, dann $\mathrm{ST} \vdash pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\varphi\urcorner)$.
(2) (2 Punkte) $\mathrm{ST} \vdash (pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \wedge pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\varphi \to \psi\urcorner)) \to pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\psi\urcorner)$ für alle $\in$-Formeln $\varphi$ und $\psi$.
(3) (2 Punkte) $\mathrm{ST} \vdash pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\varphi\urcorner) \to pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner pv_{\mathrm{ST}}(\ulcorner\varphi\urcorner)\urcorner)$ für jede $\in$-Formel $\varphi$.

(Tipp: *Orientieren Sie sich am Beweis von Satz 146 aus der Vorlesung*).

**Aufgabe 44** (4 Punkte)**.** Definieren Sie eine $\in$-Formeln $\varphi$ und $\psi$ mit den folgenden Eigenschaften:

(1) ST beweist, dass $\varphi$ eine Surjektion von $\omega$ auf $\mathrm{V}_\omega$ definiert.
(2) ST beweist, dass $\psi$ eine Injektion von $\mathrm{V}_\omega$ nach $\omega$ definiert.

(Tipp: *Definieren Sie die Surjektion rekursiv und kodieren Sie die Elemente einer Menge in $\mathrm{V}_\omega$ durch die Primfaktoren einer natürlichen Zahl*).

**Aufgabe 45.** Es bezeichne $S$ die Erweiterung der Sprache der Zahlentheorie um ein zweistelliges Funktionssymbol exp. Die Theorie $\mathrm{PA}_{\mathrm{exp}}$ besteht aus den Axiomen von PA, dem Induktionsschema für alle $S$-Formeln und den Axiomen

- $\forall n \ \exp(n,0) = 1.$
- $\forall m, n \ \exp(n, m+1) = \exp(n,m) \cdot n.$

(1) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Theorie $\mathrm{PA}_{\mathrm{exp}}$ genau dann konsistent ist, wenn die Theorie $\mathrm{ST} \cup \{\neg \mathsf{Inf}\}$ konsistent ist (Tipp: *Gegeben ein Modell* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathrm{PA}_{\mathrm{exp}}$*, betrachten Sie die definierbare zweistellige Relation*

$$mEn \iff \mathfrak{M} \models \exists k, r \ \ [k > 0 \ \wedge \ r < \exp(2,m) \ \wedge \ n = k \cdot \exp(2,m) + r]$$

und zeigen Sie induktiv, dass alle Axiome von ST in $(|\mathfrak{M}|, E)$ gelten. Verwenden Sie Resultate aus der Vorlesung für die Rückrichtung).

(2) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ST} \cup \{\mathsf{Inf}\} \vdash \mathrm{Con}(\ulcorner \mathrm{PA} \urcorner)$.

(3) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathrm{ST} \vdash \mathsf{Inf}$ äquivalent zur Inkonsistenz von ST ist.

Abgabe: Montag, 11. Juli 2016, in der Vorlesung.