Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 10	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 37. Beweisen Sie die folgenden Aussagen in ST.

(1) (2 Punkte) Wenn x endlich ist, dann ist $\mathcal{P}(n)$ endlich und $|\mathcal{P}(n)| = 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(2) (2 Punkte) Wenn F eine Funktion ist (d.h. eine Klassenfunktion) und x endlich ist, dann ist $F[x]$ endlich und $\operatorname{card}(F[x]) \leq \operatorname{card}(x)$.

(3) (2 Punkte) Jedes $n \in \mathbb{N}$ ist endlich und $\operatorname{card}(n) = n$.

Wir definieren in ST die Folge $\langle V_n \mid n \in \omega\rangle$ durch Rekursion, wobei $V_0 = \emptyset$ und $V_{n+1} = \mathcal{P}(V_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren in ST

$$V_\omega = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}\ x \in V_n\}.$$

Wir bezeichnen das Standardmodell von $\mathsf{ST} \cup \{\neg\mathsf{Inf}\}$ mit $\mathcal{V}$.

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{M}$ ein Modell von $\mathsf{ST} \cup \{\neg\mathsf{Inf}\}$.

(1) Konstruieren Sie eine Einbettung $\iota : \mathcal{V} \to \mathcal{M}$.

(2) Zeigen Sie, dass die Einbettung ι eindeutig bestimmt ist und ihr Bild abwärts abgeschlossen ist, d.h. für alle $x \in |\mathcal{V}|$ und alle $z \in \iota(x)$ existiert ein $y \in |\mathcal{V}|$ mit $\iota(y) = z$.

In der nächsten Aufgabe können Sie die folgende Aussage verwenden. Angenommen, $\mathcal{M}$ ist ein Modell von PA.

(1) Es gibt eine Einbettung $\iota : \mathbb{N} \to |\mathcal{M}|$ des Standardmodells der Arithmetik in $\mathcal{M}$.

(2) Die Einbettung ι ist eindeutig bestimmt und ihr Bild ist abwärts abgeschlossen, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in |\mathcal{M}|$ mit $\iota(n) = x +^{\mathcal{M}} y$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(m) = x$.

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Angenommen $\mathcal{M} = (M, 0, 1, +, \cdot)$ ist ein abzählbares Modell von PA und $<_M$ ist definiert durch

$$x < y \Leftrightarrow \exists z \neq 0\ (x + z = y).$$

Angenommen, $(M, <)$ ist nicht isomorph ist zu $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$. Zeigen Sie, dass es eine dichte lineare Ordnung $(Q, <_Q)$ ohne Endpunkte gibt, so dass $(M, <)$ isomorph ist ist zu einer linearen Ordnung, die aus einer isomorphen Kopie von $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ beststeht, über der abzählbar viele Kopien von $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ liegen, die im Ordnungstyp $(Q, <_Q)$ angeordnet sind.

(Hinweis: zeigen Sie dazu, dass zwischen zwei Kopien von $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ mindestens eine weitere Kopie von $(\mathbb{Z}, <_{\mathbb{Z}})$ liegt).

Aufgabe 40 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Klasse der Nichtstandardmodelle der Peano-Arithmetik (d.h. die Klasse aller Modelle von PA, die nicht zum Standardmodell der Arithmetik isomorph sind) nicht in der Sprache der Arithmetik $S_{AR} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ axiomatisiert werden kann.

Aufgabe 41. Zeigen Sie die folgenden Aussagen für Formeln in der Sprache $\{\in\}$.

(1) (2 Punkte) Es gibt keine Formel $\theta(x, y)$, so dass ST für alle Formeln $\varphi(x)$, $\psi(y)$ beweist, dass

$$\theta(\ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner) \Leftrightarrow \{z \mid \varphi(x)\} = \{z \mid \psi(z)\}.$$

(2) (2 Punkte) Es gibt keine Formel $\sigma(x)$, so dass ST für alle Formeln $\varphi(x)$ beweist, dass

$$\theta(\ulcorner\varphi\urcorner) \Leftrightarrow \exists u \ (u = \{z \mid \varphi(x)\})$$

(Hinweis: diese Aufgabe verwendet den Vorlesungsstoff von Mittwoch, den 29. Juni.)

Abgabe: Montag, 04. Juli 2016, in der Vorlesung.