

**Einführung in die Mathematische Logik**  
**Sommersemester 2016**

Übungsaufgaben  
Serie 9

Prof. Dr. Peter Koepke  
Dr. Philipp Schlicht

**Aufgabe 32.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

- (1) (2 Punkte) In  $\text{ST}$  ist beweisbar, dass es keine Funktion  $F: \mathbb{N} \rightarrow V$  gibt, so dass  $\forall n (n \in \mathbb{N} \rightarrow F(n+1) \in F(n))$  gilt.
- (2) (2 Punkte) Es gibt ein Modell  $(M, \in^M)$  von  $\text{ST}$  und eine Folge  $\langle x_n \mid n \in \omega \rangle$ , so dass  $x_n \in M$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $x_{n+1} \in^M x_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

**Aufgabe 33.** Betrachten Sie das Axiomensystem  $\text{PA}$  in Definition 66.

- (1) (2 Punkte) Definieren Sie durch Rekursion über den Formelaufbau für jede Formel  $\varphi$  in der Sprache von  $\text{PA}$  eine Formel  $\varphi^{\mathbb{N}}$  in der Sprache von  $\text{ST}$ , indem Sie die Quantoren auf  $\mathbb{N}$  einschränken.
- (2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass  $\text{ST} \vdash \varphi^{\mathbb{N}}$  für jedes Axiom  $\varphi$  von  $\text{PA}$ .
- (3) (2 Punkte) Zeigen Sie für alle Formeln  $\varphi, \psi$  mit  $\text{ST} \vdash \varphi^{\mathbb{N}}$  und  $\text{ST} \vdash \psi^{\mathbb{N}}$ , dass  $\text{ST} \vdash (\varphi \wedge \psi)^{\mathbb{N}}$ .

**Aufgabe 34.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle endlichen Folgen  $w, w', w''$  in  $\text{ST}$ .

- (1) (2 Punkte)  $(ww')w'' = w(w'w'')$ .
- (2) (2 Punkte)  $uw = u'w \Rightarrow u = u'$ .

**Aufgabe 35.** Eine Funktion  $F: A \rightarrow B$  heisst *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Beweisen Sie die folgenden Aussagen in  $\text{ST}$ .

- (1) (2 Punkte) Wenn  $x$  endlich ist, dann gibt es ein  $n \in \mathbb{N}$  und eine bijektive Funktion  $f: n \rightarrow x$  mit  $\text{ran}(f) = x$ .
- (2) (2 Punkte) Es gibt keine Menge  $x$  und kein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass es bijektive Funktionen  $f: n \rightarrow x$  und  $g: n+1 \rightarrow x$  gibt.

**Aufgabe 36.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen in  $\text{ST}$ .

- (1) (2 Punkte) Wenn  $x$  endlich ist und jedes Element von  $x$  endlich ist, dann ist  $\bigcup x$  endlich.
- (2) (2 Punkte) Wenn  $x$  endlich ist und  $y \subseteq x$ , dann ist  $y$  endlich.

Abgabe: Montag, 27. Juni 2016, in der Vorlesung.