Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 8	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 26 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie den Kompaktheitssatz mit Hilfe einer Ultraproduktkonstruktion.
(Tipp: *Betrachten Sie für eine endlich konsistente Formelmenge* Φ *(d.h. jede endliche Teilmenge von* Φ *ist konsistent) die Menge* I *aller endlichen Teilmengen von* Φ*. Zeigen Sie, dass die Menge*

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid \exists \sigma \in I\ \forall \tau \in I\ [\sigma \subseteq \tau \to \tau \in X]\}$$

ein Filter auf I *ist. Verwenden Sie dann die Aufgaben 20 und 25*)

Aufgabe 27. (a) Eine Menge z heisst *transitiv*, wenn für alle Mengen x, y mit $x \in y \in z$ gilt, dass $x \in z$.
(b) Eine Menge x ist eine *Ordinalzahl*, wenn x und alle Elemente von x transitiv sind.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

(1) (2 Punkte) Wenn x transitiv ist, dann ist auch $x + 1 := x \cup \{x\}$ transitiv.
(2) (2 Punkte) Jedes $x \in \mathbb{N}$ ist eine Ordinalzahl.
(3) (2 Punkte) Wenn x eine Menge von Ordinalzahlen ist, dann ist $\sup(x) := \bigcup x$ eine Ordinalzahl.
(4) (2 Punkte) Wenn $n \in \mathbb{N}$, dann hat jede nichtleere Teilmenge x von n ein Maximum.

Aufgabe 28 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie das Aussonderungsschema aus den übrigen Axiomen und Schemata.

Aufgabe 29 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie $\forall x \forall y \exists z\ (x \times y = z)$, ohne das Potenzmengenaxiom zu verwenden.

Aufgabe 30 (2 Punkte)**.** Zeigen Sie für Klassenterme X, X', Y, Y' mit $X = X'$ und $Y = Y'$, dass $X \cup Y = X' \cup Y'$.

Aufgabe 31 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie für Klassenterme $A_0, \ldots, A_n$ und $A'_0, \ldots, A'_n$ mit $A_0 = A'_0, \ldots, A_n = A'_n$ und Formeln $\varphi(x, X_0, \ldots, X_n)$, dass

$$\{x \mid \varphi(x, A_0, \ldots, A_n)\} = \{x \mid \varphi(x, A'_0, \ldots, A'_n\}.$$

Abgabe: Montag, 20. Juni 2016, in der Vorlesung.