Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 7	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 22 (8 Punkte)**.** Addition und Multiplikation natürlicher Zahlen kann in Prolog durch das folgende Programm formalisiert werden.

```
add(X,zero,X).
add(X,succ(Y),succ(Z) :-add(X,Y,Z).mult(X,zero,zero).
mult(X,succ(Y),Z) :-mult(X,Y,W),add(W,X,Z).
```

Die Frage $2 \times 2 =?$ kann wie folgt formalisiert werden.

```
?-mult(succ(succ(zero)),succ(succ(zero)),V).
```

Beschreiben Sie, wie Prolog dieses Produkt bestimmt.

Aufgabe 23 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie $\forall x\ x \neq \{y \mid y \notin y\}$ mit Hilfe der Herbrand-Prozedur.

Aufgabe 24. Gegeben sei eine erststufige Sprache S, eine nicht-leere Menge I und ein Filter $\mathcal{F}$ auf I.

(1) (1 Punkt) Beweisen Sie, dass

$$\left(\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i\right)\frac{[g]_{\mathcal{F}}}{x} = \prod_{\mathcal{F}}\left(\mathfrak{M}_i \frac{g(i)}{x}\right)$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ von S-Modellen und jedes $g \in \prod_{i\in I} |\mathfrak{M}_i|$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge aller S-Formeln φ, die die Äquivalenz

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i \models \varphi \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ von S-Modellen erfüllen, mit $Ł_{\mathcal{F}}$.

(2) (5 Punkte) Beweisen Sie, dass $Ł_{\mathcal{F}}$ alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktion und $\exists$-Quantifikation abgeschlossen ist.

Aufgabe 25. (4 Punkte) Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, S eine erststufige Sprache und $Ł_{\mathcal{U}}$ die in Aufgabe 24 definierte Menge von S-Formeln. Beweisen Sie, dass $Ł_{\mathcal{U}}$ abgeschlossen unter Negation ist. Zusammen mit Aufgabe 24 zeigt dies, dass $Ł_{\mathcal{U}}$ in diesem Fall gleich der Menge aller S-Formeln ist. Dieses Ergebnis ist der *Satz von Los*.

Abgabe: Montag, 13. Juni 2016, in der Vorlesung.