Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 6	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 19. Angenommen, S ist eine Sprache.

(a) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede quantorenfreie S-Formel φ äquivalent zu einer S-Formel ψ in disjunktiver Normalform und zu einer S-Formel θ in konjunktiver Normalform ist (Satz 77 der Vorlesung).

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass jede S-Formel φ äquivalent zu einer S-Formel χ in pränexer Normalform ist (Satz 79 der Vorlesung).

Aufgabe 20. Angenommen F ist ein Filter auf einer nicht leeren Menge I.

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es für jede Teilmenge X von I einen Filter $G \supseteq F$ gibt, so dass $X \in G$ oder $I \setminus X \in G$.

(b) (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es einen Ultrafilter $U \supseteq F$ auf I gibt.

Hinweis: betrachten Sie die Sprache S, die für jedes $X \subseteq I$ ein Konstante c_X und für jedes $i \in I$ eine Konstante c_i enthält. Definieren Sie eine S-Theorie T, die aussagt, dass durch die c_X ein Ultrafilter definiert wird, und wenden Sie den Kompaktheitssatz auf T an.

Aufgabe 21. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) (2 Punkte) Angenommen φ ist eine S_K-Formel in der Sprache S_K der Körpertheorie, die in jedem unendlichen Körper gilt. Zeigen Sie, dass eine natürliche Zahl n gibt, so dass φ in jedem unendlichen Körper mit mindestens n Elementen gilt. Folgern Sie, dass die Klasse der unendlichen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Klasse der torsionsfreien Gruppen nicht endlich axiomatisierbar ist.

(3) (2 Punkte) Zeigen sie, dass die Klasse der (ungerichteten) Graphen ohne Zyklen nicht endlich axiomatisierbar ist.

Abgabe: Montag, 06. Juni 2016, in der Vorlesung.