Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 5	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 15 (6 Punkte)**.** Angenommen S ist eine abzählbare Sprache, Φ ist eine konsistente S-Theorie und $\mathrm{Var} \setminus \mathrm{Var}(\Phi)$ ist unendlich. Zeigen Sie, dass es eine S-Theorie $\Psi \subseteq L^S$ mit folgenden Eigenschaften gibt.

(a) $\Phi \subseteq \Psi$.
(b) Ψ ist konsistent.
(c) Ψ enthält Beispiele.

Hinweis: Sie können die Beweise von Satz 59 und Satz 60 verwenden. Arbeiten Sie mit Variablen statt mit Konstanten und erklären Sie, an welchen Stellen Sie von den Beweisen abweichen.

Aufgabe 16. (a) (3 Punkte) Angenommen, $\mathfrak{M}$ ist ein Nichtstandardmodell von PA, $\mathbb{N} \subseteq |\mathfrak{M}|$ und das Redukt von $\mathfrak{M}$ auf $\mathbb{N}$ ist die Struktur der natürlichen Zahlen. Wir schreiben $m \mid n$ für $\exists k\ m \cdot k = n$. Für eine Menge S von Primzahlen sagen wir, dass S in $\mathfrak{M}$ *als Produkt repräsentiert* ist, wenn es ein $x \in |\mathfrak{M}|$ gibt, so dass für alle Primzahlen p gilt: $p \in S \iff \mathfrak{N} \vDash p \mid x$. Angenommen, S ist eine unendliche Menge von Primzahlen. Zeigen Sie, dass es ein Nichtstandardmodell von PA gibt, in dem S repräsentiert ist.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es überabzählbar viele paarweise nicht isomorphe abzählbare Modelle von PA gibt.

Hinweis: Angenommen, $\mathcal{C}$ ist eine abzählbare Menge von abzählbaren Modellen von PA wie in (1). Zeigen Sie, dass es eine Menge S von Primzahlen gibt, die nicht in einem Modell in $\mathcal{C}$ repräsentiert ist.

Gegeben sei eine nicht-leere Menge I. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von I heißt *Filter auf* I, falls die folgenden Aussagen gelten.

(1) $I \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$.
(2) Ist $X \in \mathcal{F}$ und $Y \subseteq I$ mit $X \subseteq Y$, so gilt $Y \in \mathcal{F}$.
(3) Sind $X, Y \in \mathcal{F}$, so gilt $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Im Folgenden sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer nicht-leeren Menge I und $\langle A_i \mid i \in I\rangle$ eine Sequenz nicht-leerer Mengen. Wir bezeichnen die Mengen aller Funktionen $g : I \longrightarrow V$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ mit $\prod_{i\in I} A_i$. Es sei $\approx_{\mathcal{F}}$ die durch

$$g \approx_{\mathcal{F}} h \iff \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$$

definierte Relation auf $\prod_{i\in I} A_i$.

Aufgabe 17 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass $\approx_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Wir bezeichnen die $\approx_{\mathcal{F}}$-Äquivalenzklasse von $g \in \prod_{i\in I} A_i$ mit $[g]_{\mathcal{F}}$ und die Menge aller $\approx_{\mathcal{F}}$-Äquivalenzklassen mit $\prod_{\mathcal{F}} A_i$.

Es sei S eine erststufige Sprache und $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ eine Sequenz von S-Modellen. Wir definieren ein S-Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ mit Trägermenge $\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|$ durch die folgenden Klauseln:

(1) Ist v_m eine freie Variable von S, so definieren wir $v_i^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i\in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = v_m^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.

(2) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol von S, so definieren wir
$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}([g_0]_{\mathcal{F}}, \dots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}}) = [h]_{\mathcal{F}},$$
wobei h die Funktion in $\prod_{i\in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit
$$h(i) = f^{\mathfrak{M}_i}(g_0(i), \dots, g_{n-1}(i))$$
für alle $i \in I$ ist.

(3) Ist R ein n-stelliges Relationssymbol in S, so definieren wir $R^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}$ als die Menge aller $([g_0]_{\mathcal{F}}, \dots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}})$ in $(\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|)^n$ mit
$$\{\, i \in I \mid (g_0(i), \dots, g_{n-1}(i)) \in R^{\mathfrak{M}_i} \} \in \mathcal{F}.$$

Wir nennen $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ das *reduzierte Produkt der* $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ *bezüglich* $\mathcal{F}$.

Aufgabe 18. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) (4 Punkte) Das Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ ist wohldefiniert.

(2) (4 Punkte) Ist t ein S-Term, so gilt $t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i\in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = t^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.

Abgabe: Montag, 30. Mai 2016, in der Vorlesung.