Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 4	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 10 (6 Punkte)**.** Angenommen $S = \{\preceq\}$ ist eine erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol und Γ ist die Menge der folgenden S-Formeln.

(a) $\forall x\ x \preceq x$.
(b) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(x \preceq y \wedge y \preceq z) \longrightarrow x \preceq z]$.
(c) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ [x \preceq z\ \wedge\ y \preceq z]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma\ \vdash\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \exists w\ [x \preceq w\ \wedge\ y \preceq w\ \wedge\ z \preceq\ w].$$

gilt.

Für eine Sprache L und ein L-Modell $\mathfrak{M}$ definieren wir $\mathrm{Th}^+(\mathfrak{M})$ als die Menge der Formeln $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ mit $\mathfrak{M} \vDash \varphi(x_0, \dots, x_n)$.

Aufgabe 11. (a) (2 Punkte) Wir betrachten das Modell $\mathfrak{N}$, das aus der Struktur

$$(\mathbb{N}, 0, 1, +, \cdot)$$

und der Belegung $\mathfrak{N}(v_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}^+(\mathfrak{N})$ eine Henkin-Theorie ist.

(b) (2 Punkte) Wir betrachten das Modell $\mathfrak{R}$, das aus der Struktur

$$(\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, /)$$

und der Belegung $\mathfrak{R}(v_n) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besteht. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}^+(\mathfrak{R})$ keine Henkin-Theorie ist.

Aufgabe 12. (6 Punkte)

(a) Angenommen S ist eine Sprache und Φ ist eine konsistente Menge von S-Formeln mit der Eigenschaft, dass jede Formel φ in Φ von der Form

$$\forall x_1 \dots \forall x_{n-1}\ s \equiv t$$

für S-Terme s und t mit $\mathit{frei}(s), \mathit{frei}(t) \subseteq \{x_0, \dots, x_{n-1}\}$ ist, und $\mathfrak{T}^\Phi$ das zugehörige Termmodell. Beweisen Sie $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$.

(b) Es sei $S_{Gr} = \{\circ, ^{-1}, e\}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie und $\Phi_{Gr} \subseteq L^{S_{Gr}}$ die Menge der Axiome der Gruppentheorie. Die erste Teilaufgabe zeigt, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_{Gr}}$ eine Gruppe ist. Beweisen Sie, dass für jede abzählbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $s : \mathfrak{T}^{\Phi_{Gr}} \to \mathfrak{G}$ existiert.

Aufgabe 13 (2 Punkte)**.** Angenommen L ist eine Sprache und $(\mathfrak{M}_i \mid i < \omega)$ ist eine Folge von L-Strukturen, so dass für alle $i \leq j$ in $\mathbb{N}$ gilt: $\mathfrak{M}_i$ ist eine elementare Sustruktur von $\mathfrak{M}_j$. Wir betrachten die eindeutig bestimmte L-Struktur $\mathfrak{M}$ mit Trägermenge $|\mathfrak{M}| = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} |\mathfrak{M}_i|$, so dass für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Struktur $\mathfrak{M}_i$ eine Substruktur von $\mathfrak{M}$ ist. Zeigen Sie, dass für alle $i \in \mathbb{N}$ die Struktur $\mathfrak{M}_i$ eine elementare Substruktur von $\mathfrak{M}$ ist.

Aufgabe 14 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(1) $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +)$ hat unendlich viele verschiedene Substrukturen, die isomorph zu $\mathfrak{N}$ sind.

(2) Jede elementare Substruktur von $\mathfrak{N}$ ist gleich $\mathfrak{N}$.

Abgabe: Montag, 23. Mai 2016, in der Vorlesung.