Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 3	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 7 (4 Punkte)**.** Es sei S die leere Sprache ohne Funktions- und Relationssymbole und $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) Jede Bijektion $f : |\mathfrak{A}| \longrightarrow |\mathfrak{A}|$ ist ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$.

(2) Falls $|\mathfrak{A}|$ unendlich ist, so sind die folgenden Aussagen für jede Substruktur $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{A}$ äquivalent:

   (a) $|\mathfrak{B}|$ ist unendlich.

   (b) $\mathfrak{B}$ ist eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$.

   (Hinweis: *Benutzen Sie Aufgabe 3.5*)

Aufgabe 8 (8 Punkte)**.** Es sei S eine abzählbare, erststufige Sprache und Φ eine Menge von S-Formeln.

(1) Es sei S^+ die erststufige Sprache, die S um ein n-stelliges Funktionssymbol f_φ für jede S-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen erweitert, und

$$\Phi^+ = \Phi \cup \{\psi_\varphi \mid \varphi \textit{ ist eine } S\textit{-Formel mit freien Variablen}\},$$

wobei ψ_φ die S^+-Formel

$$\forall x_0 \ \ldots \ \forall x_{n-1} \ [\exists y \ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \\ \longrightarrow \ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, f_\varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}))]$$

ist. Beweisen Sie, dass für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ ein S^+-Modell $\mathfrak{M}^+$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \Phi^+$ und $\mathfrak{M}^+ \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \mathrm{Var}) = \mathfrak{M}$ existiert.

(2) Konstruieren Sie eine abzählbare, erststufige Sprache S^*, die S erweitert, und eine Menge Φ^* von S^*-Formeln mit $\Phi \subseteq \Phi^*$, so dass die folgenden Aussagen gelten.

   (a) Für jede S^*-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen existiert ein S^*-Funktionssymbol f mit

$$\Phi^* \models \forall x_0 \ \ldots \ \forall x_{n-1} \ [\exists y \ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, y) \\ \longrightarrow \ \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}, f(x_0, \ldots, x_{n-1}))].$$

   (b) Für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ existiert ein S^*-Modell $\mathfrak{M}^*$ mit $\mathfrak{M}^* \models \Phi^*$ und $\mathfrak{M}^* \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \mathrm{Var}) = \mathfrak{M}$.

   In diesem Fall sagen wir, dass Φ^* *Skolemfunktionen* besitzt.

(3) Es sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und A eine abzählbare Teilmenge von $|\mathfrak{A}|$. Konstruieren Sie eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge abzählbar ist und A enthält.

Aufgabe 9 (10 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

(1) $\vee$-Einführung:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \varphi \vee \psi \end{array}$$

(2) $\vee$-Einführung:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \vee \psi \end{array}$$

(3) $\vee$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \vee \psi \\ \Gamma & \varphi \to \chi \\ \Gamma & \psi \to \chi \\ \hline \Gamma & \chi \end{array}$$

(4) $\wedge$-Einführung:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \\ \Gamma & \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \wedge \psi \end{array}$$

(5) $\wedge$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

(6) $\wedge$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \wedge \psi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

(7) $\exists$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi\frac{t}{x} \\ \hline \Gamma & \exists x \varphi \end{array}$$

(8) $\exists$-Elimination:
$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \exists x \varphi \\ \Gamma & \varphi\frac{y}{x} & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array} \text{, wobei } y \notin \mathrm{free}(\Gamma \cup \{\exists \varphi, \psi\}).$$

Abgabe: Montag, 09. Mai 2016, in der Vorlesung.