Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 2	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine erststufige Sprache S , $\Gamma \subseteq L^S$ und ein S-Modell $\mathfrak{M}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen für alle S-Formeln φ und ψ.

(1) Es gilt $\mathfrak{M} \models (\varphi \vee \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ oder $\mathfrak{M} \models \psi$ gilt.

(2) Es gilt $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ und $\mathfrak{M} \models \psi$ gilt.

(3) Es gilt $\mathfrak{M} \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \models \varphi$ zu $\mathfrak{M} \models \psi$ äquivalent ist.

(4) Es gilt $\mathfrak{M} \models \exists v_n\ \varphi$ genau dann, wenn ein $a \in |\mathfrak{M}|$ mit $\mathfrak{M}\frac{a}{v_n} \models \varphi$ existiert.

(5) Falls $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \models \psi$, so gilt $\Gamma \models (\varphi \wedge \psi)$.

(6) Falls $\Gamma \models (\varphi \wedge \psi)$, so gilt $\Gamma \models \varphi$ und $\Gamma \models \psi$.

(7) Falls $\Gamma \models \varphi$, so gilt $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ und $\Gamma \models \psi \vee \varphi$.

(8) Falls $\Gamma \models \varphi \vee \psi$ und $\Gamma \models \neg\psi$, so gilt $\Gamma \models \varphi$.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Definieren Sie eine erststufige Sprache S, $\Gamma \subseteq L^S$ und S-Formeln φ und ψ, so dass $\Gamma \models (\varphi \vee \psi)$, $\Gamma \not\models \varphi$ und $\Gamma \not\models \psi$.

Aufgabe 6. Eine partielle Ordnung $(I, \leq_I)$ ist eine *gerichtete Menge*, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i, j \leq_I k$ existiert. Ist S eine erststufige Sprache und $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge, so nennen wir

$$(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j\rangle)$$

ein *gerichtetes System von S-Strukturen über* $(I, \leq_I)$, falls die folgenden Aussagen für alle $i, j, k \in I$ gelten:

(a) $\mathfrak{A}_i$ ist eine S-Struktur.

(b) Gilt $i \leq_I j$, so ist $f_{i,j} : \mathfrak{A}_i \longrightarrow \mathfrak{A}_j$ eine Einbettung von S-Strukturen.

(c) $f_{i,i} = \mathsf{id}_{|\mathfrak{A}_i|}$ und $i \leq_I j \leq_I k$ impliziert $f_{i,k} = f_{j,k} \circ f_{i,j}$.

Es sei $(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I\rangle, \langle f_{i,j} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j\rangle)$ ein gerichtetes System von S-Strukturen über einer gerichtete Menge $(I, \leq_I)$. Definiere

$$D = \{(x, i) \mid i \in I,\ x \in |\mathfrak{A}_i|\}$$

Wir definieren eine Relation $\approx$ auf D durch

$$(x, i)\ \approx (y, j)\ \Longleftrightarrow\ \exists k \in I\ [i, j \leq_I k\ \wedge\ f_{i,k}(x) = f_{j,k}(y)].$$

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\approx$ eine Äquivalenzrelation auf D ist.

Für $i \in I$ definieren wir

$$f^i : |\mathfrak{A}_i| \longrightarrow {}^D\!/\!\approx;\ x \mapsto [x, i],$$

wobei $[x, i]$ die Äquivalenzklasse von $(x, i) \in D$ bezüglich $\approx$ bezeichnet und ${}^D\!/\!\approx$ die Menge aller Äquivalenzklassen ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $f^i = f^j \circ f_{i,j}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt.

(3) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = {}^{D}/_{\approx}$ gibt, so dass alle Abbildungen f^i Einbettungen von S-Strukturen sind. Diese Struktur nennt man den *direkten Limes* des gerichteten Systems.

(4) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die oben konstruierte Struktur $\mathfrak{A}$ die folgende *universelle Eigenschaft* besitzt und durch sie bis aus auf Isomorphie eindeutig bestimmt wird: *ist* $\mathfrak{B}$ *eine* S*-Struktur und* $\langle g^i \mid i \in I\rangle$ *ein System von Einbettungen* $g^i : \mathfrak{A}_i \to \mathfrak{B}$, *so dass* $g^i = g^j \circ f_{i,j}$ *für alle* $i, j \in I$ *mit* $i \leq_I j$ *gilt, dann existiert eine eindeutig bestimmte Einbettung* $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *mit* $g^i = f \circ f^i$ *für alle* $i \in I$.

(5) (4 Punkte) Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und $\mathbf{K}$ die Menge aller Teilmengen von $\mathbb{C}$, die eine endliche, algebraische Körpererweiterungen von $\mathbb{Q}$ sind. Für $K, L \in \mathbf{K}$ mit $K \subseteq L$ definieren wir $\mathfrak{A}_K$ als die kanonische S_K-Struktur mit Trägermenge K und $f_{K,L}$ als die kanonische Inklusionsabbildung. Zeigen Sie, dass $(\mathbf{K}, \subseteq)$ eine gerichtete Menge ist und bestimmen Sie den Teilkörper von $\mathbb{C}$, der zum direkten Limes des so definierten gerichteten Systems isomorph ist.

Abgabe: Montag, 02. Mai 2016, in der Vorlesung.

Die Fachschaft Mathematik feiert am 12.05 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 9.05., Di. 10.05. und Mi. 11.05. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de.