Einführung in die Mathematische Logik
Sommersemester 2016

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 1	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 1. Es sei $S_{Arith} = \{+, \ \cdot \ , 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik mit Konstantensymbolen 0 und 1 sowie zweistelligen Funktionssymbolen + und $\ \cdot \ $.

(1) (3 Punkte) Formulieren Sie die folgenden Axiome der Körpertheorie als S_{Arith}-Formeln zuerst in der durch $\vee$, $\wedge$ und $\exists$ erweiterten Sprache und anschließend in der nicht-erweiterten Sprache.
   (a) *Existenz von Inversen bezüglich der Multiplikation.*
   (b) *Kommutativität der Addition.*
   (c) *Distributivität.*

(2) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass jeder S_{Arith}-Term aus einer ungeraden Anzahl von Symbolen besteht.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.** Es sei $\mathbb{B}$ die boolesche Algebra der Wahrheitswerte. Zeigen Sie, dass jede Funktion $F : |\mathbb{B}|^n \longrightarrow |\mathbb{B}|$ durch Komposition der Funktionen $\mathbb{B}(\wedge)$ und $\mathbb{B}(-)$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 3. Es sei S eine erststufige Sprache, $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $\mathfrak{A}$ eine S-Substruktur von $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{M}$ ein S-Modell mit $\mathfrak{M} \restriction \{\forall\} \cup S = \mathfrak{A}$, so bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} : \{\forall\} \cup S \cup \mathrm{Var} \longrightarrow \mathrm{V}$ die eindeutig bestimmte Funktion mit $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \restriction \{\forall\} \cup S = \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}} \restriction \mathrm{Var} = \mathfrak{M} \restriction \mathrm{Var}$.

(1) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ ein S-Modell ist.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(t)$ für jeden S-Term t gilt.

Wir sagen, dass eine S-Formel φ *absolut zwischen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist*, falls $\mathfrak{M}(\varphi) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$ für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \restriction \{\forall\} \cup S = \mathfrak{A}$ gilt. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(3) (3 Punkte) Die Mengen der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ absoluten Formeln ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Disjunktion.

(4) (1 Punkt) Jede quantorenfreie Formel ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

(5) (5 Punkte) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
   (a) $\mathfrak{A}$ ist eine *elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (d.h. jede S-Formel ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$).
   (b) Ist φ eine S-Formel und $\mathfrak{M}$ S-Modell mit $\mathfrak{M} \restriction \{\forall\} \cup S = \mathfrak{A}$, so impliziert $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\exists x \varphi) = \mathbb{T}$ bereits $\mathfrak{M}(\exists x \varphi) = \mathbb{T}$.

Abgabe: Montag, 25. April 2016, in der Vorlesung.