Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Abgabe am 22.06.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Übungsblatt 9

Definition 1. *Sei S eine Sprache. Wir nennen S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent, wenn für alle S-Sätze φ gilt*

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ gdw } \mathfrak{B} \models \varphi.$$

Aufgabe 1: (3 Punkte) Zeigen Sie

(a) Für jede S-Struktur $\mathfrak{A}$ ist die Klasse der zu $\mathfrak{A}$ elementar äquivalenten S-Strukturen axiomatisierbar.

(b) Ist S abzählbar, so ist diese Klasse durch eine abzählbare Menge von S-Sätzen axiomatisierbar.

(c) Ist S abzählbar, so gibt es zu jeder unendlichen S-Struktur eine elementar äquivalente, jedoch nicht isomorphe S-Struktur (verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 8).

Definition 2. *Sei S eine Sprache. $\varphi \in L^S$ heißt* termreduziert, *wenn alle atomaren Teilausdrücke von φ eine der folgenden Gestalten haben:*

$$Rx_1 \dots x_n, \quad x \equiv y, \quad fx_1 \dots x_n \equiv y \text{ oder } c \equiv y,$$

wobei $R \in S$ ein Relationssymbol, $f \in S$ ein Funktionssymbol, $c \in S$ ein Konstantensymbol und $x_1, \dots, x_n, x, y$ Variablensymbole sind.

Beispiel: Sind $f, g, h \in S$ einstellige Funktionssymbole, so ist $\forall x\ fgx \equiv hy$ nicht termreduziert.

Aufgabe 2: (3 Punkte) Zeigen Sie, dass jedes $\varphi \in L^S$ zu einem termreduzierten $\varphi^* \in L^S$ äquivalent ist.

Definition 3. *Eine Sprache S heißt* relational, *wenn sie nur Relationssymbole enthält. Ist S eine beliebige Sprache, so definieren wir die relationale Sprache S^r, die aus allen Relationssymbolen von S bestehen soll, für jedes Konstantensymbol $c \in S$ ein neues einstelliges Relationssymbol C enthält, und für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in S$ ein neues $n+1$-stelliges Relationssymbol F enthält.*

Wir ordnen jeder S-Stuktur $\mathfrak{A}$ eine S^r-Struktur $\mathfrak{A}^r$ durch folgende Festlegungen zu:

- $A^r = A$,
- *für jedes Relationssymbol $P \in S$ sei $P^{\mathfrak{A}^r} = P^{\mathfrak{A}}$,*
- *für jedes n-stellige Funktionssymbol $f \in S$ gelte $F^{\mathfrak{A}^r} a_1 \dots a_n a$ gdw $f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) = a$,*
- *für jedes Konstantensymbol $c \in S$ gelte $C^{\mathfrak{A}^r} a$ gdw $c^{\mathfrak{A}} = a$.*

Aufgabe 3: (3 Punkte) Zeigen Sie:

(a) Zu jedem $\psi \in L^S$ gibt es ein $\psi^r \in L^{S^r}$, so dass für jede Variablenbelegung β gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi \text{ gdw } (\mathfrak{A}^r, \beta) \models \psi^r.$$

(b) Zu jedem $\psi \in L^{S^r}$ gibt es ein $\bar{\psi} \in L^S$, so dass für jede Variablenbelegung β gilt:

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \bar{\psi} \text{ gdw } (\mathfrak{A}^r, \beta) \models \psi.$$

Hinweis: Nach Aufgabe 2 genügt es in (a) termreduzierte $\psi \in L^S$ zu betrachten.

Aufgabe 4: (3 Punkte) Sei S eine relationale Sprache und sei $\varphi \in L_0^S$ von der Form $\exists x_0 \dots \exists x_n \forall y_0 \dots \forall y_m\ \psi$ mit quantorenfreiem ψ. Zeigen Sie:

- Ist φ konsistent, so gibt es ein Modell von φ mit höchstens $n+1$ Elementen (verwenden Sie Blatt 4, Aufgabe 1b).
- Ist $R \in S$ ein zweistelliges Relationssymbol, so ist der Satz $\forall x\, \exists y\ Rxy$ nicht zu einem $\{R\}$-Satz obiger Form äquivalent.