Prof. Dr. Peter Koepke
Dr. Peter Holy

Freiwillige Abgabe am 06.07.2015

Übungen zur Einführung in die Mathematische Logik

Probeexamen

Sollten Ihnen noch Punkte zur Prüfungszulassung fehlen, können Sie die Lösungen abgeben und so noch zusätzliche Punkte sammeln. Andernfalls bringen Sie die Lösungen einfach in Ihr Tutorium mit. Die auf diesem Blatt möglichen zusätzlichen Punkte zählen nicht zur Maximalpunktezahl, die beträgt für das gesamte Semester 123 Punkte.

Aufgabe 1: (2 Punkte) Leiten Sie die folgenden Regeln aus dem Sequenzenkalkül her. Sie dürfen auch in der Vorlesung oder in der Übung abgeleitete Regeln des Sequenzenkalküls benutzen, geben Sie dabei aber jeweils genau die Regel an, die Sie anwenden.

(a) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi \to \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \to \neg\varphi}$

(b) $\dfrac{\Gamma \quad \forall x \forall y\ \varphi}{\Gamma \quad \forall y \forall x\ \varphi}$

Aufgabe 2: (3 Punkte) Es sei $S_{GT} = \{\circ, e, {}^{-1}\}$ die Sprache der Gruppentheorie und $GT \subseteq L_0^S$ die Axiome der Gruppentheorie in dieser Sprache.

(a) Definieren Sie einen S-Satz φ_0, so dass für jedes Modell $\mathcal{G}$ von GT genau dann $\mathcal{G} \models \varphi_0$ gilt, wenn $\mathcal{G}$ die bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Gruppe mit zwei Elementen ist.

(b) Das Zentrum $C(G)$ einer Gruppe G besteht aus allen Elementen $g \in G$, so dass $h \circ g = g \circ h$ für alle $h \in G$ gilt. Eine Gruppe G besitzt triviales Zentrum, falls $C(G)$ nur aus dem neutralen Element von G besteht. Definieren Sie einen S-Satz φ_1, so dass für jedes Modell $\mathcal{G}$ von GT genau dann $\mathcal{G} \models \varphi_1$ gilt, wenn $\mathcal{G}$ eine Gruppe mit trivialem Zentrum ist.

(c) Definieren Sie eine Menge Φ von S-Sätzen, so dass für jedes Modell $\mathcal{G}$ von GT genau dann $\mathcal{G} \models \Phi$ gilt, wenn das Zentrum von $\mathcal{G}$ unendlich ist.

Aufgabe 3: (2 Punkte) Es sei $S_R = \{R\}$ die erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol R und $\mathcal{U}$ die Klasse aller S_R-Modelle $\mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft, dass für alle $x \in |\mathfrak{M}|$ unendlich viele $y \in \mathfrak{M}$ mit $R^{\mathfrak{M}}(x, y)$ existieren.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ in S_R axiomatisierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{U}$ in S_R nicht endlich axiomatisierbar ist.

Aufgabe 4: (2 Punkte) Es sei $\mathcal{L}_R = \{0, 1, +, \cdot\}$ die Sprache der Ringtheorie. Formen Sie die Formel

$$\varphi = \forall x\ \ [\forall y\ x + y \equiv y\ \ \leftrightarrow\ \ \neg \exists y\ x \cdot y \equiv 1]$$

in pränexe Normalform um, d.h. geben Sie eine Formel ψ in pränexer Normalform an, die zu φ äquivalent ist (d.h. $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$).

Aufgabe 5: (3 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen aus den Axiomen von ZF herleitbar sind:

(a) Ist $A \neq \emptyset$ und $f\colon A \to B$ injektiv, so gibt es $g\colon B \to A$ surjektiv.

(b) Ist x eine Teilmenge von Ord, so ist $\bigcup x \in Ord$.

(c) Zu jeder Ordinalzahl gibt es eine größere Limesordinalzahl; dabei nennen wir eine Ordinalzahl α *Limesordinalzahl*, wenn weder $\alpha = 0$, noch α von der Form $\beta + 1$ für eine Ordinalzahl β ist.