Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 9	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 31. Es sei $S = \{<, m, u, o\}$ die erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol $<$, einem zweistelligen Funktionssymbol m und einstelligen Funktionssymbolen u und o. Wir betrachten die Menge $\Phi \subseteq L_0^S$, die die Axiome für lineare Ordnungen um die Axiome

(a) $\forall x\ (u(x) < x\ \wedge\ x < o(x))$

(b) $\forall x \forall y\ [x < y\ \rightarrow\ (x < m(x,y)\ \wedge\ m(x,y) < y)]$

erweitert, und das zugehörige Termmodell $\mathcal{T}^\Phi$.

(1) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\langle |\mathcal{T}^\Phi|, <^{\mathcal{T}^\Phi} \rangle$ keine lineare Ordnung ist.

(2) (4 Punkte) Zeigen Sie, dass für jede durch $<^{\mathcal{T}^\Phi}$ linear geordnete Teilmenge Q_0 von $|\mathcal{T}^\Phi|$ eine Teilmenge Q existiert, so dass $Q_0 \subseteq Q \subseteq |\mathcal{T}^\Phi|$ gilt und $\langle Q, <^{\mathcal{T}^\Phi} \restriction (Q \times Q) \rangle$ eine lineare Ordnung ist, die zu $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ isomorph ist.

Aufgabe 32 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $PA \vdash \forall x\ [x \equiv 0 \vee \exists y\ x \equiv y + 1]$.

(2) $PA \vdash \forall x\ \forall y\ x + y \equiv y + x$.

(3) $PA \vdash \forall x \forall y\ [y \equiv 0\ \vee\ \exists r \exists s \exists t\ (x \equiv t \cdot y + r\ \wedge\ \ r + s + 1 \equiv y)]$.

Aufgabe 33 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathfrak{M}$ ein Modell von PA.

(1) Konstruieren Sie eine Einbettung $\iota : \mathbb{N} \rightarrow |\mathfrak{M}|$ des Standardmodells der Arithmetik in $\mathfrak{M}$.

(2) Zeigen Sie, dass die Einbettung ι eindeutig bestimmt ist und ihr Bild abwärts abgeschlossen ist, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in |\mathfrak{M}|$ mit $\iota(n) = x +^{\mathfrak{M}} y$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\iota(m) = x$.

Aufgabe 34 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Klasse der Nichtstandardmodelle der Peano-Arithmetik (d.h. die Klasse aller Modelle von PA, die nicht zum Standardmodell der Arithmetik isomorph sind) nicht in der Sprache der Arithmetik $S_{AR} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ axiomatisiert werden kann.

Abgabe: Montag, den 23. Juni 2014, vor der Vorlesung.