Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 3	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 8. Gegeben sei eine erststufige Sprache S, ein S-Modell $\mathfrak{M}$, paarweise verschiedene Variablen $x_0, ..., x_{r-1}$ und Terme $t_0, ..., t_{r-1} \in T^S$, und eine Formel $\phi \in L^S$. Beweisen sie die Äquivalenz

$$\mathfrak{M} \models \phi \frac{t_0 ... t_{r-1}}{x_0 ... x_{r-1}} \iff \mathfrak{M} \frac{\mathfrak{M}(t_0) ... \mathfrak{M}(t_{r-1})}{x_0 ... x_{r-1}} \models \phi$$

in den folgenden Fällen.

(1) (2 Punkte) Für Formeln ϕ der Form $s_0 \equiv s_1$.

(2) (2 Punkte) Für Formel ϕ der Form $\psi_0 \to \psi_1$ unter der Annahme, dass sie für ψ_0 und ψ_1 gilt.

(3) (2 Punkte) Für Formel ϕ der Form $\neg\psi$ unter der Annahme, dass sie für ψ gilt.

Aufgabe 9 (2 Punkte)**.** Angenommen $(K, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper und A, B sind 2×2-Matrizen über K. Formulieren Sie die folgenden Aussagen in der Sprache $S_{Ar} = \{+, \cdot, 0, 1\}$. Sie können dazu neue Konstanten, Funktions- und Relationssymbole einführen und in S_{Ar} definieren.

(1) $det(A) \neq 0$ gilt genau dann, wenn A invertierbar ist.

(2) A ist konjugiert zu B, d.h. es gibt eine invertierbare 2×2-Matrix C über K mit $C^{-1}AC = B$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)**.** Gegeben sei eine erststufige Sprache S, eine S-Theorie Φ sowie S-Formeln φ und ψ.

(1) Zeigen Sie: $\Phi \models (\varphi \wedge \psi)$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \psi$.

(2) Zeigen Sie: wenn $\Phi \models \varphi$ oder $\Phi \models \psi$, dann $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$.

(3) Geben Sie S, Φ, ϕ, ψ an, so dass $\Phi \models (\varphi \vee \psi)$, aber weder $\Phi \models \varphi$ noch $\Phi \models \psi$.

(4) Entscheiden Sie, ob für alle S, Φ, ϕ, ψ gilt: $\Phi \models (\varphi \leftrightarrow \psi)$ genau dann, wenn $\Phi \models \varphi$ zu $\Phi \models \psi$ äquivalent ist.

Wenn S eine erststufige Sprache ist und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ S-Strukturen, dann heißt eine Abbildung $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ *Homomorphismus*, wenn

$$\mathfrak{A} \models \phi(a_0, ..., a_n) \Rightarrow \mathfrak{B} \models \phi(f(a_0), ..., f(a_n))$$

für alle atomaren S-Formeln ϕ und alle $a_0, ..., a_n \in |\mathfrak{A}|$.
Eine partielle Ordnung $(I, \leq_I)$ ist eine *gerichtete Menge*, falls für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ mit $i, j \leq_I k$ existiert.
Ist S eine erststufige Sprache und $(I, \leq_I)$ eine gerichtete Menge, so nennen wir

$$(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle f_{j,i} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j \rangle)$$

ein *gerichtetes System von S-Strukturen über* $(I, \leq_I)$, falls die folgenden Aussagen für alle $i, j, k \in I$ gelten.

(1) $\mathfrak{A}_i$ ist eine S-Struktur.

(2) Gilt $i \leq_I j$, so ist $f_{j,i} : |\mathfrak{A}_j| \to |\mathfrak{A}_i|$ ein Homomorphismus von S-Strukturen.

(3) $f_{i,i} = \mathsf{id}_{|\mathfrak{A}_i|}$ und $i \leq_I j \leq_I k$ impliziert $f_{k,i} = f_{j,i} \circ f_{k,j}$.

Aufgabe 11. Angenommen S is eine erststufige Sprache, die keine Relationssymbole enthält, und $(\langle \mathfrak{A}_i \mid i \in I \rangle, \langle f_{j,i} \mid i, j \in I,\ i \leq_I j \rangle)$ ein gerichtetes System von S-Strukturen über einer gerichtete Menge $(I, \leq_I)$. Setze

$$D = \{g \mid \mathrm{dom}(g) = I,\ \forall i \in I\ g(i) \in |\mathfrak{A}_i|,\ \forall i \leq j\ f_{j,i}(g(j)) = g(i)\}.$$

Für $i \in I$ und $g \in D$ definieren wir $f^i(g) = g(i)$.

(1) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $f^i = f_{j,i} \circ f^j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt.

(2) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte S-Struktur $\mathfrak{A}$ mit $|\mathfrak{A}| = D$ gibt, so dass alle Abbildungen f^i Homomorphismen von S-Strukturen sind. Diese Struktur nennt man den *inversen Limes* des gerichtetens Systems.

(3) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die oben konstruierte Struktur $\mathfrak{A}$ die folgende *universelle Eigenschaft* besitzt und durch sie bis aus auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist: ist $\mathfrak{B}$ eine S-Struktur und $\langle g^i \mid i \in I \rangle$ ein System von Homomorphismen $g^i : |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}_i|$, so dass $g^i = f_{j,i} \circ g^j$ für alle $i, j \in I$ mit $i \leq_I j$ gilt, dann existiert ein eindeutig bestimmter Homomorphismus $f : |\mathfrak{B}| \to |\mathfrak{A}|$ mit $f = f^i \circ g^i$ für alle $i \in I$.

(4) (4 Punkte) Wir betrachten die Gruppen $\mathfrak{A}_i = (\mathbb{Z}/2^i\mathbb{Z}, +)$ für $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der inverse Limes des durch $f_{j,i} \colon |\mathfrak{A}_j| \to |\mathfrak{A}_i|$, $f_{j,i}(n) = n \pmod{2^i}$ für $i \leq j$ gegebenen gerichteten Systems eine torsionsfreie abelsche Gruppe ist.

Abgabe: Montag, den 05. Mai 2014, vor der Vorlesung.