Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 1	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 1. (2 Punkte) Verwenden Sie das *Zorn'sche Lemma*, um die folgende Aussage zu beweisen. *Ist* $(P, \leq)$ *eine partielle Ordnung und* A *eine linear geordnete Teilmenge von* P*, so existiert eine* maximale *linear geordnete Obermenge* L *von* A *(d.h.* L *wird durch* $\leq$ *linear geordnet und jede echte Obermenge von* L *wird nicht durch* $\leq$ *linear geordnet).*

Aufgabe 2.

(1) (2 Punkte) Sei A ein abzählbare Menge. Beweisen Sie, dass die Menge aller endlichen Sequenzen von Elementen aus A abzählbar ist.

(2) (2 Punkte) Beweisen Sie, dass es keine bijektive Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \{g \mid g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ gibt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.** Definieren Sie eine Sprache S und einen endlichen Kalkül $\mathcal{C}$ über S, so dass *Prod*$(\mathcal{C})$ genau die Menge der ganzen Zahlen in Dezimaldarstellung ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Sprachen $S_{Arith} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ der Arithmetik und $S_{po} = \{\leq\}$ der partiellen Ordnungen. Geben Sie die Formeln zuerst in der erweiterten Sprache mit den zusätzlichen Symbolen $\{\exists, \vee, \wedge\}$ und dann in der nicht-erweiterten Sprache an.

(1) (3 Punkte) Formulieren Sie die folgenden Axiome der Körpertheorie in der Sprache S_{Arith}.
  (a) Existenz von Inversen bezüglich der Multiplikation.
  (b) Kommutativität der Addition.
  (c) Distributivität.

(2) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass jeder S_{Arith}-Term aus einer ungeraden Anzahl von Symbolen besteht.

(3) (2 Punkte) Formulieren Sie die Axiome der dichten linearen Ordnungen in $S_{\leq}$.

(4) (3 Punkte) Formulieren Sie die folgenden Aussagen in $S_{\leq}$.
  (a) Die Vorgänger jedes Elements sind linear geordnet, d.h. die partielle Ordnung ist ein Baum.
  (b) Über jedem Element x gibt es mindestens zwei unvergleichbare Elemente y, z.

(c) Das Element x hat einen direkten Vorgänger.

Abgabe: Mittwoch, den 23. April 2014, vor der Vorlesung.