Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 10	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 35 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}^*\ \ [x \sim x' \longrightarrow f(x) \sim f(x')]$$

gilt, wobei $(\mathbb{R}^*, <, +, \cdot, (r \mid r \in \mathbb{R}), f, g)$ das in der Vorlesung konstruierte Modell der Nichtstandard-Analysis ist.

Aufgabe 36 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von Nichtstandard-Analysis.

(1) Summenregel:

$$(f+g)'(x) = f'(x)\ +\ g'(x).$$

(2) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)\ =\ \frac{f'(x)\cdot g(x)\ - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2},$$

falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x)\ =\ f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(Tipp: *Verwenden Sie Aufgabe 35 und die Stetigkeit von differenzierbaren Funktionen*).

Aufgabe 37 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(1) Für jede Menge $X \subseteq Ord$ ist $\bigcup X$ transitiv.

(2) $\bigcup(\alpha + 1) = \alpha$ für alle $\alpha \in Ord$ und $\bigcup \lambda = \lambda$ für alle Limesordinalzahlen λ.

Aufgabe 38 (6 Punkte)**.** Angenommen $<$ ist eine binäre Relation auf einer Menge X, und $(X, <)$ ist *fundiert*, d.h. jede Teilmenge von X hat (mindestens) ein $<$-minimales Element.

(1) Zeigen Sie für jede $\in$-Formel ϕ, dass aus

$$\forall y \in X\ ((\forall x < y\ \phi(x)) \Rightarrow \phi(y))$$

folgt, dass $\forall x \in X\ \phi(x)$.

(2) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung $r \colon X \to Ord$ gibt, so dass $\forall y \in X\ r(y) = \sup(\{r(x) \mid x \in X,\ x \in y\})$, und dass für diese Abbildung gilt $\forall x, y \in X\ (x < y \Rightarrow r(x) \in r(y))$.

Abgabe: Mittwoch, den 02. Juli 2014, vor der Vorlesung.