Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben | Prof. Dr. Peter Koepke

Serie 8 | Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 27 (2 Punkte)**.** Es sei S eine erststufige Sprache, $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen und Φ eine Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Ist Ψ eine endliche Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert, so existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.**

(1) Zeigen Sie, dass die Klasse aller endlichen Graphen nicht endlich axiomatisierbar ist.

(2) Zeigen Sie, dass die Klasse aller Graphen ohne Zykel nicht endlich axiomatisierbar ist.

Ist S eine erststufige Sprache, $\mathfrak{M}$ ein S-Modell, I eine nicht-leere Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, so bezeichnen wir mit $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}$ das zugehörige Ultraprodukt der Sequenz $\langle \mathfrak{M} \mid i \in I \rangle$ und nennen dieses Modell die *Ultrapotenz von* $\mathfrak{M}$ *bezüglich* $\mathcal{U}$. Für $x \in |\mathfrak{M}|$ sei $c_x : I \to |\mathfrak{M}|$ die Abbildung mit konstantem Wert x. Definiere

$$e : |\mathfrak{M}| \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} |\mathfrak{M}|;\ x \mapsto [c_x]_{\mathcal{U}}.$$

Aufgabe 29 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Abbildung e eine elementare Einbettung von $\mathfrak{M}$ in die Ultrapotenz $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}$ ist. (Tipp: *Verwenden Sie Aufgabe 22*).

Aufgabe 30 (6 Punkte)**.** Es es S eine erststufige Sprache, die ein zweistelliges Relationssymbol „$\prec$“ enthält, und Φ eine Menge von S-Sätzen, so dass $\langle |\mathfrak{M}|, \prec^{\mathfrak{M}} \rangle$ für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Φ eine lineare Ordnung ist. Beweisen Sie, dass für jedes unendliche Modell $\mathfrak{M}$ von Φ ein S-Modell $\mathfrak{N}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert.

(1) Es existiert eine Teilmenge Q von $|\mathfrak{N}|$, so dass die Ordnungen $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ und $\langle Q, \prec^{\mathfrak{N}} \restriction (Q \times Q) \rangle$ isomorph sind.

(2) Es existiert eine elementare Einbettung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$.

(Tipp: *Verwenden Sie entweder eine Ultrapotenzkonstruktion oder den Kompaktheitssatz. Im ersten Fall betrachten Sie die Menge I aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}$, den Filter*

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid (\exists x \in I)(\forall y \in I)\ [x \subseteq y \to y \in X]\}$$

auf I und ordnungserhaltende Einbettungen $\langle i_x : (x, <) \to (|\mathfrak{M}|, \prec^{\mathfrak{M}}) \mid x \in I \rangle$. Im zweiten Fall erweitern Sie zunächst S um Konstantensymbole für Elemente von $|\mathfrak{M}|$ und betrachten Sie dann die Theorie von $\mathfrak{M}$ in der erweiterten Sprache).

Abgabe: Montag, den 16. Juni 2014, vor der Vorlesung.