Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 7	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 25 (4 Punkte)**.** Es sei $S_{Ar} = \{0, 1, +, \cdot\}$ die erststufige Sprache der Arithmetik. Setze

$$\varphi_t = \exists v_2 \ v_0 \equiv v_1 \cdot v_2.$$

Konstruieren Sie eine S_{Ar}-Struktur $\mathfrak{A}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(1) In $\mathfrak{A}$ und in der Standardstruktur der natürlichen Zahlen gelten die gleichen S_{Ar}-Sätze (d.h. S_{Ar}-Formeln ohne freie Variablen).

(2) Es existiert ein $a \in |\mathfrak{A}| \setminus \{0^{\mathfrak{A}}\}$ mit der Eigenschaft, dass die Menge

$$\{b \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \models \varphi_t[a, b]\}$$

unendlich ist.

(Tipp: *Erweitern Sie die Sprache um abzählbar viele neue Konstantensymbole und verwenden Sie entweder den Kompaktheitssatz oder eine Ultraproduktkonstruktion*)

Gegeben sei eine nicht-leere Menge I. Wir nennen einen Filter $\mathcal{F}$ auf I einen *Ultrafilter* auf I, falls für alle $X \subseteq I$ entweder $X \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus X \in \mathfrak{F}$ gilt.

Aufgabe 26. (8 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf I ist genau dann ein Ultrafilter, wenn er ein maximaler Filter auf I ist (d.h. für jeden Filter $\mathcal{F}'$ auf I mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ gilt bereits $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$).

(2) Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I und $\langle M_i \mid i \in I\rangle$ eine Sequenz endlicher Mengen mit der Eigenschaft, dass

$$X_n = \{\ i \in I \mid M_i \textit{ enthält mindestens } n \textit{ Elemente}\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Element von $\mathcal{U}$ ist. Dann ist die Menge $\prod_{\mathcal{U}} M_i$ unendlich.

(3) Ist I eine unendliche Menge, so ist die Menge der koendlichen Teilmengen von I (d.h. die Menge der $X \subseteq I$ mit $I \setminus X$ endlich) ein Filter auf I. Dieser Filter ist kein Ultrafilter.

(4) Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge I, so existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. (Tipp: *Verwenden Sie das Zorn'sche Lemma und Teil 1*)

Aufgabe 27 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie den Kompaktheitssatz mit Hilfe einer Ultraproduktkonstruktion.

(Tipp: *Betrachten Sie für eine endlich konsistente Formelmenge Φ (d.h. jede endliche Teilmenge von Φ ist konsistent) die Menge I aller endlichen Teilmengen von Φ. Zeigen Sie, dass die Menge*

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid \exists \sigma \in I \ \forall \tau \in I \ [\sigma \subseteq \tau \to \tau \in X]\}$$

ein Filter auf I ist. Verwenden Sie dann die Aufgaben 17, 22 und 26)

Abgabe: Montag, den 02. Juni 2014, vor der Vorlesung.