Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 6	Dr. Philipp Schlicht

Aufgabe 20. (4 Punkte)

(1) Es sei S eine erststufige Sprache, Φ eine konsistente Menge von S-Formeln mit der Eigenschaft, dass jede Formel φ in Φ von der Form

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{n-1}\ s \equiv t$$

für S-Terme s und t mit $\mathit{frei}(s), \mathit{frei}(t) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ ist, und $\mathfrak{T}^\Phi$ das zugehörige Termmodell. Beweisen Sie $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$.

(2) Es sei $S_K = \{\cdot, {}^{-1}, 1, +, -, 0\}$ die erweiterte Sprache der Körpertheorie und $\Phi_K \subseteq L^{S_K}$ die Menge der Axiome der Körpertheorie. Die erste Teilaufgabe zeigt, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ ein Körper ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ einen Unterkörper K hat, der isomorph zu $\mathbb{Q}$ ist, und dass $\mathfrak{T}^{\Phi_K}$ unendlichen Transzendenzgrad über K hat-

Aufgabe 21 (4 Punkte)**.** Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und φ eine S_K-Formel, die in jedem unendlichen Körper gilt. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass φ in jedem endlichen Körper mit mindestens N Elementen gilt.

Aufgabe 22. (4 Punkte) Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, S eine erststufige Sprache und Ł$_\mathcal{U}$ die in Aufgabe 16 definierte Menge von S-Formeln. Beweisen Sie, dass Ł$_\mathcal{U}$ abgeschlossen unter Negation ist. Zusammen mit Aufgabe 16 zeigt dies, dass Ł$_\mathcal{U}$ in diesem Fall gleich der Menge aller S-Formeln ist. Dieses Resultat ist der *Satz von Łos.*

Aufgabe 23. (6 Punkte) Es sei S eine erststufige Sprache.

(1) Konstruieren Sie eine Menge Φ von S-Formeln, so dass

$$(\star) \qquad \mathfrak{M} \models \Phi \iff |\mathfrak{M}| \text{ ist unendlich}$$

für alle S-Modelle $\mathfrak{M}$ gilt.

(2) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine endliche Menge von S-Formel gibt, die $(\star)$ erfüllt.

Abgabe: Montag, den 26. Mai 2014, vor der Vorlesung.