Mathematische Logik - Sommersemester 2014

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 2	Dr. Philipp Schlicht

Gegeben sei eine erststufige Sprache S und eine S-Struktur $\mathfrak{A}$. Eine *Erweiterung von* $\mathfrak{A}$ *durch Belegung von Variablen* ist ein S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \upharpoonright (\{\forall\} \cup S) = \mathfrak{A}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Es sei $S_{Ar} = \{+, \cdot, 0, 1\}$ die Sprache der Arithmetik und $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung der Standardstruktur der natürlichen Zahlen durch Belegung von Variablen (d.h. $\mathfrak{M}$ ist ein S_{Ar}-Modell mit $\mathfrak{M}(\forall) = \mathbb{N}$, $\mathfrak{M}(+) = +_{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{M}(\cdot) = \cdot_{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{M}(0) = 0_{\mathbb{N}}$ und $\mathfrak{M}(1) = 1_{\mathbb{N}}$). Wir betrachten die folgenden Aussagen.

(1) „$\mathfrak{M}(v_0) > \mathfrak{M}(v_1)$".
(2) „$\mathfrak{M}(v_0)$ *teilt* $\mathfrak{M}(v_1)$".
(3) „$\mathfrak{M}(v_0)$*,* $\mathfrak{M}(v_1)$ *und* $\mathfrak{M}(v_2)$ *sind paarweise teilerfremd*".
(4) „$\mathfrak{M}(v_0)$ *ist eine Primzahl*".
(5) „$\mathfrak{M}(v_0)$ *ist ein Gegenbeispiel zur* Goldbach-Vermutung".
(6) „*Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge*".

Formalisieren Sie diese Aussagen durch S_{Ar}-Formeln, i.e. geben Sie S_{Ar}-Formeln $\varphi_1, \dots, \varphi_6$ an, so dass „$\mathfrak{M}(\varphi_i) = 1$" der Aussage (i) entspricht.

Gegeben seien S-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wir sagen, dass $\mathfrak{A}$ eine *S-Substruktur* von $\mathfrak{B}$ ist, falls die folgenden Aussagen gelten.

(1) $\mathfrak{A}(\forall) \subseteq \mathfrak{B}(\forall)$.
(2) $\mathfrak{A}(f) = \mathfrak{B}(f) \upharpoonright \mathfrak{A}(\forall)^n$ für jedes n-stellige Funktionssymbol f in S.
(3) $\mathfrak{A}(R) = \mathfrak{B}(R) \cap \mathfrak{A}(\forall)^n$ für jedes n-stellige Relationssymbol R in S.

Im Folgenden sei $\mathfrak{A}$ eine S-Substruktur von $\mathfrak{B}$. Ist $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen, so bezeichnet $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ die Funktion $F : \{\forall\} \cup S \cup \mathit{Var} \longrightarrow V$ mit $F \upharpoonright (\{\forall\} \cup S) = \mathfrak{B}$ und $F \upharpoonright \mathit{Var} = \mathfrak{M} \upharpoonright \mathit{Var}$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{B}$ durch Belegung von Variablen ist und $\mathfrak{M}(t) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(t)$ für jeden S-Term t gilt.

Wir sagen, dass eine S-Formel φ *absolut zwischen* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *ist*, falls $\mathfrak{M}(\varphi) = \mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\varphi)$ für jede Erweiterung $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen gilt.

Aufgabe 7. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) (3 Punkte) Die Mengen der zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ absoluten Formeln ist abgeschlossen unter Negation, Konjunktion und Disjunktion.
(2) (3 Punkte) Jede quantorenfreie Formel ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.
(3) (6 Punkte) Die folgenden Aussagen sind äquivalent.
    (a) $\mathfrak{A}$ ist eine *elementare Substruktur* von $\mathfrak{B}$ (d.h. jede S-Formel ist absolut zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$).
    (b) Ist φ eine S-Formel und $\mathfrak{M}$ eine Erweiterung von $\mathfrak{A}$ durch Belegung von Variablen, so impliziert $\mathfrak{M}^{\mathfrak{B}}(\exists x \varphi) = 1$ bereits $\mathfrak{M}(\exists x \varphi) = 1$.

Abgabe: Montag, den 28. April 2014, vor der Vorlesung.