Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 11	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 40 (6 Punkte)**.** Es seien $F : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ und $G : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ in PA repräsentierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass die eindeutig bestimmte Funktion $H : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ mit

(1) $H(0, n_0, \ldots, n_{k-1}) = F(n_0, \ldots, n_{k-1})$

(2) $H(n+1, n_0, \ldots, n_{k-1}) = G(n, H(n, n_0, \ldots, n_{k-1}), n_0, \ldots, n_{k-1})$

für alle $n, n_0, \ldots, n_{k-1} \in \mathbb{N}$ ebenfalls in PA repräsentierbar ist. (Tipp: Verwenden Sie das Lemma zur β-Funktion).

Ein *Graph* $\mathcal{G} = (X, E)$ besteht aus einer nicht-leeren Menge X und einer symmetrischen, anti-reflexiven Relation E auf X. Eine Teilmenge C von X heißt *Clique*, falls $E(x, y)$ für alle $x, y \in C$ mit $x \neq y$ gilt. Eine Teilmenge D von X heißt *diskret*, falls $\neg E(x, y)$ für alle $x, y \in D$ gilt. Die folgende Aussage ist eine Folgerung aus dem *Satz von Ramsey* für unendliche Mengen

$(*)$ *Jeder abzählbare Graph enthält entweder eine unendliche Clique oder eine unendliche diskrete Teilmenge.*

Aufgabe 41 (6 Punkte)**.** Leiten Sie die folgende Aussage aus $(*)$ mit Hilfe des Kompaktheitsatzes her: *für jede natürliche Zahl N existiert eine natürliche Zahl n, so dass jeder endliche Graph mit mindestens n Elementen entweder eine Clique oder eine diskrete Teilmenge der Größe N besitzt.*

Aufgabe 42 (4 Punkte)**.** Es sei S eine erststufige Sprache, $\mathcal{T}_S$ die Menge aller vollständigen, konsistenten Teilmengen von L_0^S und τ die durch Mengen der Form

$$U_\varphi = \{\Phi \in \mathcal{T}_S \mid \Phi \vdash \varphi\}$$

mit $\varphi \in L_0^S$ auf $\mathcal{T}_S$ erzeugte Topologie. Beweisen Sie, dass der topologische Raum $(\mathcal{T}_S, \tau)$ kompakt ist (d.h. für jede offene Überdeckung $\langle U_{\varphi_i} \mid i \in I \rangle$ von $\mathcal{T}_S$ existiert ein endliche Teilmenge I_0 von I, so dass $\langle U_{\varphi_i} \mid i \in I_0 \rangle$ ebenfalls eine Überdeckung von $\mathcal{T}_S$ ist).

Zusatzaufgabe 43 (4 Extrapunkte)**.** Es sei $S_{po} = \{<\}$ die Sprache der partiellen Ordnungen. Betrachten Sie die folgenden Aussagen.

(1) „$\mathbb{P}$ ist keine lineare Ordnung".
(2) „$\mathbb{P}$ ist eine endliche lineare Ordnung mit fünf Elementen"
(3) „$\mathbb{P}$ besitzt ein maximales Element und kein minimales Element"
(4) „$\mathbb{P}$ ist entweder eine dichte oder eine diskrete Ordnung"

Formulieren Sie S_{po}-Sätze $\varphi_1, \ldots, \varphi_4$, so dass für jedes S_{po}-Modell $\mathbb{P}$, das eine partielle Ordnung ist, die Aussage (i) äquivalent zu $\mathbb{P} \models \varphi_i$ ist.

Zusatzaufgabe 44 (6 Extrapunkte)**.** Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

(1) $$\frac{\Gamma \quad \varphi \to \psi}{\Gamma \quad \neg\psi \to \neg\varphi}$$

(2) $$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi \to \psi \\ \Gamma & \varphi \to \neg\psi\end{array}}{\Gamma \quad \neg\varphi}$$

(3) $$\frac{\Gamma \quad (\varphi \wedge \psi) \to \xi}{\Gamma \quad \varphi \to (\psi \to \xi)}$$

Eine abelsche Gruppe $\mathbf{G} = (G, 0, +)$ heißt *divisibel*, falls für alle $g \in G$ und jede natürliche Zahl $n \geq 2$ ein $h \in G$ mit

$$g = \underbrace{h + \cdots + h}_{n-mal}$$

existiert.

Zusatzaufgabe 45 (6 Extrapunkte)**.** Es sei S_{Gr} die Sprache der Gruppentheorie.

(1) Zeigen Sie, dass die Klasse der divisiblen Gruppen in S_{Gr} axiomatisierbar ist.
(2) Zeigen Sie, dass die Klasse der divisiblen Gruppen in S_{Gr} nicht endlich axiomatisierbar ist. (Tipp: *Betrachten Sie für eine endliche Menge P von Primzahlen Untergruppen von $(\mathbb{Q}, 0, +)$ von der Form*

$$\left\{ \frac{k}{l} \in \mathbb{Q} \mid k, l \in \mathbb{Z} \textit{ teilerfremd und alle Primteiler von } l \textit{ sind Elemente von } P \right\}$$

und verwenden Sie den Kompaktheitssatz).

Abgabe: Freitag, den 06. Juli 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.