Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 10	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 36 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann stetig ist, wenn

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}^*\ \ [x \sim x' \longrightarrow f(x) \sim f(x')]$$

gilt, wobei $(\mathbb{R}^*, <, +, \cdot, (r \mid r \in \mathbb{R}), f, g)$ das in der Vorlesung konstruierte Modell der Nichtstandard-Analysis ist.

Aufgabe 37 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Hilfe von Nichtstandard-Analysis.

(1) Summenregel:

$$(f+g)'(x) = f'(x)\ +\ g'(x).$$

(2) Quotientenregel:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)\ =\ \frac{f'(x) \cdot g(x)\ - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2},$$

falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(3) Kettenregel:

$$(f \circ g)'(x)\ =\ f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

(Tipp: *Verwenden Sie Aufgabe 36 und die Stetigkeit von differenzierbaren Funktionen*).

Aufgabe 38 (4 Punkte)**.** Es sei $\mathcal{A}$ ein endliches Alphabet und n eine natürliche Zahl. Beweisen Sie, dass die Menge der Wörter in $\mathcal{A}^*$, deren Länge durch n teilbar ist, R-entscheidbar ist.

Aufgabe 39 (4 Punkte)**.** Konstruieren Sie eine S_{ZT}-Formel, die die Potenzfunktion

$$p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N};\ (m, n) \mapsto m^n$$

in PA repräsentiert. (Tipp: *Verwenden Sie das Lemma zur β-Funktion und Aufgabe 34*).

Abgabe: Freitag, den 29. Juni 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.