Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 8	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 27 (2 Punkte)**.** Es sei S eine erststufige Sprache, $\mathcal{K}$ eine Klasse von S-Strukturen und Φ eine Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert. Ist Ψ eine endliche Menge von S-Sätzen, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert, so existiert eine endliche Teilmenge von Φ, die $\mathcal{K}$ axiomatisiert.

Aufgabe 28 (4 Punkte)**.** Es sei N eine natürliche Zahl. Konstruieren Sie einen Körper K mit folgenden Eigenschaften.

(1) Jedes Polynom in $K[X]$ vom Grad $\leq N$ besitzt eine Nullstelle in K.

(2) K ist nicht algebraisch abgeschlossen.

(Tipp: *Es sei* $\bar{\mathbb{Q}}$ *ein algebraischer Abschluss von* $\mathbb{Q}$*. Wählen Sie eine geeignete Surjektion* $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *und konstruieren Sie eine Sequenz* $\langle (K_n, a_n) \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(1) $K_0 = \mathbb{Q}$.

(2) $a_n : \mathbb{N} \to K_n^N$ *ist eine Surjektion.*

(3) *Gilt* $b(n) = (m_0, m_1)$ *mit* $m_0 \leq n$, $a_{m_0}(m_1) = (c_0, \dots, c_{N-1})$ *und ist* $\{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ *die Menge der Nullstellen des Polynoms*

$$f(X) = X^N + c_{N-1} \cdot X^{N-1} + \dots + c_1 \cdot X + c_0 \in K_{m_0}[X]$$

in $\bar{\mathbb{Q}}$*, so gilt* $K_{n+1} = K_n(x_0, \dots, x_{N-1})$.

Betrachten Sie $K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ *und das irreduzible Polynom* $g(X) = X^p - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ *für eine Primzahl* $p > N$*. Verwenden Sie die Multiplikativität der Körpergrade endlicher Körpererweiterungen).*

Aufgabe 29 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass die Klasse der algebraisch abgeschlossenen Körper nicht endlich axiomatisierbar ist. (Tipp: *Verwenden Sie die Aufgaben 27 und 28*).

Ist S eine erststufige Sprache, $\mathfrak{M}$ ein S-Modell, I eine nicht-leere Menge und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, so bezeichnen wir mit $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}$ das zugehörige Ultraprodukt der Sequenz $\langle \mathfrak{M} \mid i \in I \rangle$ und nennen dieses Modell die *Ultrapotenz von* $\mathfrak{M}$ *bezüglich* $\mathcal{U}$. Für $x \in |\mathfrak{M}|$ sei $c_x : I \to |\mathfrak{M}|$ die Abbildung mit konstantem Wert x. Definiere

$$e : |\mathfrak{M}| \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} |\mathfrak{M}|; \ x \mapsto [c_x]_{\mathcal{U}}.$$

Aufgabe 30 (4 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Abbildung e eine elementare Einbettung von $\mathfrak{M}$ in die Ultrapotenz $\prod_{\mathcal{U}} \mathfrak{M}$ ist. (Tipp: *Verwenden Sie Aufgabe 22*).

Aufgabe 31 (6 Punkte)**.** Es es S eine erststufige Sprache, die ein zweistelliges Relationssymbol „$\prec$" enthält, und Φ eine Menge von S-Sätzen, so dass $\langle |\mathfrak{M}|, \prec^{\mathfrak{M}} \rangle$ für jedes Modell $\mathfrak{M}$ von Φ eine lineare Ordnung ist. Beweisen Sie, dass für jedes unendliche Modell $\mathfrak{M}$ von Φ ein S-Modell $\mathfrak{N}$ mit den folgenden Eigenschaften existiert.

(1) Es existiert eine Teilmenge Q von $|\mathfrak{N}|$, so dass die Ordnungen $\langle \mathbb{Q}, < \rangle$ und $\langle Q, \prec^{\mathfrak{N}} \restriction (Q \times Q) \rangle$ isomorph sind.

(2) Es existiert eine elementare Einbettung von $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{N}$.

(Tipp: *Verwenden Sie entweder eine Ultrapotenzkonstruktion oder den Kompaktheitssatz. Im ersten Fall betrachten Sie die Menge I aller endlichen Teilmengen von $\mathbb{Q}$, den Filter*

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid (\exists x \in I)(\forall y \in I)\ [x \subseteq y \to y \in X]\}$$

auf I und ordnungserhaltende Einbettungen $\langle i_x : (x, <) \to (|\mathfrak{M}|, \prec^{\mathfrak{M}}) \mid x \in I \rangle$. Im zweiten Fall erweitern Sie zunächst S um Konstantensymbole für Elemente von $|\mathfrak{M}|$ und betrachten Sie dann die Theorie von $\mathfrak{M}$ in der erweiterten Sprache).

Abgabe: Freitag, den 15. Juni 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.