Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 7	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 23 (4 Punkte). Es sei $S_{Ar} = \{0, 1, +, \cdot\}$ die erststufige Sprache der Arithmetik. Setze

$$\varphi_t = \exists v_2 \; v_0 \equiv v_1 \cdot v_2.$$

Konstruieren Sie eine S_{Ar}-Struktur $\mathfrak{A}$ mit den folgenden Eigenschaften.

(1) In $\mathfrak{A}$ und in der Standardstruktur der natürlichen Zahlen gelten die gleichen S_{Ar}-Sätze (d.h. S_{Ar}-Formeln ohne freie Variablen).

(2) Es existiert ein $a \in |\mathfrak{A}| \setminus \{0^{\mathfrak{A}}\}$ mit der Eigenschaft, dass die Menge

$$\{b \in |\mathfrak{A}| \mid \mathfrak{A} \models \varphi_t[a, b]\}$$

unendlich ist.

(Tipp: *Erweitern Sie die Sprache um abzählbar viele neue Konstantensymbole und verwenden Sie entweder den Kompaktheitssatz oder eine Ultraproduktkonstruktion*)

Aufgabe 24 (4 Punkte). Es sei S_K die Sprache der Körpertheorie und φ eine S_K-Formel, die in jedem unendlichen Körper gilt. Beweisen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass φ in jedem endlichen Körper mit mindestens N Elementen gilt.

Aufgabe 25 (4 Punkte). Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Ist I eine unendliche Menge, so ist die Menge der koendlichen Teilmengen von I (d.h. die Menge der $X \subseteq I$ mit $I \setminus X$ endlich) ein Filter auf I. Dieser Filter ist kein Ultrafilter.

(2) Ist $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer Menge I, so existiert ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$. (Tipp: *Verwenden Sie das Zorn'sche Lemma und Aufgabe 21*)

Aufgabe 26 (6 Punkte). Beweisen Sie den Kompaktheitssatz mit Hilfe einer Ultraproduktkonstruktion.

(Tipp: *Betrachten Sie für eine endlich konsistente Formelmenge Φ (d.h. jede endliche Teilmenge von Φ ist konsistent) die Menge I aller endlichen Teilmengen von Φ. Zeigen Sie, dass die Menge*

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq I \mid \exists \sigma \in I \; \forall \tau \in I \; [\sigma \subseteq \tau \rightarrow \tau \in X]\}$$

ein Filter auf I ist. Verwenden Sie dann die Aufgaben 16, 22 und 25)

Abgabe: Freitag, den 08. Juni 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.