Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 6	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 19. (4 Punkte)

(1) Es sei S eine erststufige Sprache, Φ eine konsistente Menge von S-Formeln mit der Eigenschaft, dass jede Formel φ in Φ von der Form

$$\forall x_1 \ldots \forall x_{n-1} \; s \equiv t$$

für S-Terme s und t mit $\mathit{frei}(s), \mathit{frei}(t) \subseteq \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ ist, und $\mathfrak{T}^\Phi$ das zugehörige Termmodell. Beweisen Sie $\mathfrak{T}^\Phi \models \Phi$.

(2) Es sei $S_{Gr} = \{\circ, {}^{-1}, \mathsf{e}\}$ die erweiterte Sprache der Gruppentheorie und $\Phi_{Gr} \subseteq L^{S_{Gr}}$ die Menge der Axiome der Gruppentheorie. Die erste Teilaufgabe zeigt, dass $\mathfrak{T}^{\Phi_{Gr}}$ eine Gruppe ist. Beweisen Sie, dass für jede abzählbare Gruppe $\mathfrak{G}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus $s : \mathfrak{T}^{\Phi_{Gr}} \to \mathfrak{G}$ existiert.

Aufgabe 20. (6 Punkte) Es sei S eine erststufige Sprache.

(1) Konstruieren Sie eine Menge Φ von S-Formeln, so dass

$$(\star) \qquad \mathfrak{M} \models \Phi \iff |\mathfrak{M}| \textit{ ist unendlich}$$

für alle S-Modelle $\mathfrak{M}$ gilt.

(2) Beweisen Sie mit Hilfe des Kompaktheitssatzes, dass es keine endliche Menge von S-Formel gibt, die $(\star)$ erfüllt.

Gegeben sei eine nicht-leere Menge I. Wir nennen einen Filter $\mathcal{F}$ auf I einen *Ultrafilter* auf I, falls für alle $X \subseteq I$ entweder $X \in \mathcal{F}$ oder $I \setminus X \in \mathfrak{F}$ gilt.

Aufgabe 21. (4 Punkte)

(1) Beweisen Sie, dass ein Filter $\mathcal{F}$ auf I genau dann ein Ultrafilter ist, wenn er ein maximaler Filter auf I ist (d.h. für jeden Filter $\mathcal{F}'$ auf I mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ gilt bereits $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$).

(2) Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I und $\langle M_i \mid i \in I \rangle$ eine Sequenz endlicher Mengen mit der Eigenschaft, dass

$$X_n = \{\, i \in I \mid M_i \textit{ enthält mindestens } n \textit{ Elemente}\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Element von $\mathcal{U}$ ist. Beweisen Sie, dass die Menge $\prod_{\mathcal{U}} M_i$ unendlich ist.

Aufgabe 22. (4 Punkte) Es sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, S eine erststufige Sprache und $Ł_{\mathcal{U}}$ die in Aufgabe 16 definierte Menge von S-Formeln. Beweisen Sie, dass $Ł_{\mathcal{U}}$ abgeschlossen unter Negation ist. Zusammen mit Aufgabe 16 zeigt dies, dass $Ł_{\mathcal{U}}$ in diesem Fall gleich der Menge aller S-Formeln ist. Dieses Resultat ist der *Satz von Łos*.

Abgabe: Freitag, den 25. Mai 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.