Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 5	Dr. Philipp Lücke

Aufgabe 15 (4 Punkte)**.** Es sei $S_{GM} = \{\preceq\}$ eine erststufige Sprache mit einem zweistelligen Relationssymbol und Γ_{GM} die Menge der folgenden S_{GM}-Formeln.

(a) $\forall x\ x \preceq x$.

(b) $\forall x\ \forall y\ \forall z\ [(x \preceq y \wedge y \preceq z) \ \longrightarrow\ x \preceq z]$.

(c) $\forall x\ \forall y\ \exists z\ [x \preceq z \ \wedge\ y \preceq z]$.

Zeigen Sie (ohne Verwendung des Vollständigkeitssatzes), dass

$$\Gamma_{GM}\ \vdash\ \forall x\ \forall y\ \forall z\ \exists w\ [x \preceq w \ \wedge\ y \preceq w \ \wedge\ z \preceq\ w].$$

gilt.

Aufgabe 16. Gegeben sei eine erststufige Sprache S, eine nicht-leere Menge I und ein Filter $\mathcal{F}$ auf I.

(1) (1 Punkte) Beweisen Sie, dass

$$\left(\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i\right) \frac{[g]_{\mathcal{F}}}{x} \ = \ \prod_{\mathcal{F}} \left(\mathfrak{M}_i \frac{g(i)}{x}\right)$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ von S-Modellen und jedes $g \in \prod_{i\in I} |\mathfrak{M}_i|$ gilt.

Wir bezeichnen die Menge aller S-Formeln φ, die die Äquivalenz

$$\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i \models \varphi \iff \{i \in I \mid \mathfrak{M}_i \models \varphi\} \in \mathcal{F}$$

für jede Sequenz $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I\rangle$ von S-Modellen erfüllen, mit $Ł_{\mathcal{F}}$.

(2) (4 Punkte) Beweisen Sie, dass $Ł_{\mathcal{F}}$ alle atomaren Formeln enthält und unter Konjunktion und $\exists$-Quantifikation abgeschlossen ist.

Aufgabe 17. Es sei S eine abzählbare, erststufige Sprache und Φ eine Menge von S-Formeln.

(1) (2 Punkte) Es sei S^+ die erststufige Sprache, die S um ein n-stelliges Funktionssymbol f_φ für jede S-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen erweitert, und

$$\Phi^+ = \Phi \cup \{\psi_\varphi \mid \varphi \textit{ ist eine } S\textit{-Formel mit freien Variablen}\},$$

wobei ψ_φ die S^+-Formel

$$\forall x_0\ \ldots\ \forall x_{n-1}\ [\exists y\ \varphi(x_0,\ldots,x_{n-1},y) \\ \longrightarrow\ \varphi(x_0,\ldots,x_{n-1},f_\varphi(x_0,\ldots,x_{n-1}))]$$

ist. Beweisen Sie, dass für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ ein S^+-Modell $\mathfrak{M}^+$ mit $\mathfrak{M}^+ \models \Phi^+$ und $\mathfrak{M}^+ \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \mathrm{Var}) = \mathfrak{M}$ existiert.

(2) (3 Punkte) Konstruieren Sie eine abzählbare, erststufige Sprache S^*, die S erweitert, und eine Menge Φ^* von S^*-Formeln mit $\Phi \subseteq \Phi^*$, so dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) Für jede S^*-Formel φ mit $n+1$ freien Variablen existiert ein S^*-Funktionssymbol f mit

$$\Phi^* \models \forall x_0 \; \dots \; \forall x_{n-1} \; [\exists y \; \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, y) \\ \longrightarrow \; \varphi(x_0, \dots, x_{n-1}, f(x_0, \dots, x_{n-1}))].$$

(b) Für jedes S-Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ existiert ein S^*-Modell $\mathfrak{M}^*$ mit $\mathfrak{M}^* \models \Phi^*$ und $\mathfrak{M}^* \upharpoonright (\{\forall\} \cup S \cup \mathrm{Var}) = \mathfrak{M}$.

In diesem Fall sagen wir, dass Φ^* *Skolemfunktionen* besitzt.

Aufgabe 18 (4 Punkte)**.** Es sei S eine abzählbare, erststufige Sprache, $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und A eine abzählbare Teilmenge von $|\mathfrak{A}|$. Konstruieren Sie eine elementare Substruktur von $\mathfrak{A}$, deren Trägermenge abzählbar ist und A enthält.
(Tipp: *Verwenden Sie die Aufgaben 7 & 17 und betrachten Sie die kleinste Obermenge von A, die unter Skolemfunktionen abgeschlossen ist*).

Abgabe: Freitag, den 18. Mai 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.