Mathematische Logik - Sommersemester 2012

Übungsaufgaben	Prof. Dr. Peter Koepke
Serie 4	Dr. Philipp Lücke

Gegeben sei eine nicht-leere Menge I. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Teilmengen von I heißt *Filter auf* I, falls die folgenden Aussagen gelten.

(1) $I \in \mathcal{F}$ und $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(2) Ist $X \in \mathcal{F}$ und $Y \subseteq I$ mit $X \subseteq Y$, so gilt $Y \in \mathcal{F}$.

(3) Sind $X, Y \in \mathcal{F}$, so gilt $X \cap Y \in \mathcal{F}$.

Im Folgenden sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einer nicht-leeren Menge I und $\langle A_i \mid i \in I \rangle$ eine Sequenz nicht-leerer Mengen. Wir bezeichnen die Mengen aller Funktionen $g : I \longrightarrow V$ mit $f(i) \in A_i$ für alle $i \in I$ mit $\prod_{i \in I} A_i$. Es sei $\approx_{\mathcal{F}}$ die durch

$$g \approx_{\mathcal{F}} h \iff \{i \in I \mid g(i) = h(i)\} \in \mathcal{F}$$

definierte Relation auf $\prod_{i \in I} A_i$.

Aufgabe 11 (2 Punkte)**.** Beweisen Sie, dass $\approx_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Wir bezeichnen die $\approx_{\mathcal{F}}$-Äquivalenzklasse von $g \in \prod_{i \in I} A_i$ mit $[g]_{\mathcal{F}}$ und die Menge aller $\approx_{\mathcal{F}}$-Äquivalenzklassen mit $\prod_{\mathcal{F}} A_i$.

Es sei S eine erststufige Sprache und $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ eine Sequenz von S-Modellen. Wir definieren ein S-Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ mit Trägermenge $\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|$ durch die folgenden Klauseln:

(1) Ist v_m eine freie Variable von S, so definieren wir $v_i^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = v_m^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.

(2) Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol von S, so definieren wir

$$f^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}([g_0]_{\mathcal{F}}, \ldots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}}) = [h]_{\mathcal{F}},$$

wobei h die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit

$$h(i) = f^{\mathfrak{M}_i}(g_0(i), \ldots, g_{n-1}(i))$$

für alle $i \in I$ ist.

(3) Ist R ein n-stelliges Relationssymbol in S, so definieren wir $R^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i}$ als die Menge aller $([g_0]_{\mathcal{F}}, \ldots, [g_{n-1}]_{\mathcal{F}})$ in $(\prod_{\mathcal{F}} |\mathfrak{M}_i|)^n$ mit

$$\{\ i \in I \mid (g_0(i), \ldots, g_{n-1}(i)) \in R^{\mathfrak{M}_i}\} \in \mathcal{F}.$$

Wir nennen $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ das *reduzierte Produkt der* $\langle \mathfrak{M}_i \mid i \in I \rangle$ *bezüglich* $\mathcal{F}$.

Aufgabe 12 (6 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(1) Das Modell $\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i$ ist wohldefiniert.

(2) Ist t ein S-Term, so gilt $t^{\prod_{\mathcal{F}} \mathfrak{M}_i} = [g]_{\mathcal{F}}$, wobei g die Funktion in $\prod_{i \in I} |\mathfrak{M}_i|$ mit $g(i) = t^{\mathfrak{M}_i}$ für alle $i \in I$ ist.

Aufgabe 13 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die folgenden abgeleiteten Regeln des Sequenzenkalküls.

(1) $\vee$-Elimination:
$$\begin{array}{ll} \Gamma & \varphi \vee \psi \\ \Gamma & \varphi \to \chi \\ \Gamma & \psi \to \chi \\ \hline \Gamma & \chi \end{array}$$

(2) $\exists$-Elimination:
$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \exists x\varphi \\ \Gamma & \varphi\frac{y}{x} & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$
, wobei $y \notin \mathrm{free}(\Gamma \cup \{\exists\varphi, \psi\})$.

Aufgabe 14 (6 Punkte)**.** Leiten Sie die folgenden Tautologien im Sequenzenkalkül her.

(1) $(\varphi \longrightarrow \neg\neg\varphi) \;\wedge\; (\neg\neg\varphi \longrightarrow \varphi)$.
(2) $\exists x \forall y\ \varphi \;\longrightarrow\; \forall y \exists x\ \varphi$.
(3) $\exists x\ (\varphi \longrightarrow \forall x \varphi)$.

Abgabe: Freitag, den 11. Mai 2012, 10.00 Uhr. Briefkästen 6 und 7.