## Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke

AOR Dr. Thoralf Räsch

Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 13

**Aufgabe 62** (6 Punkte)**.** Entwickeln Sie $f$ jeweils in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt $x_0$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$.

(a) $f(x) = (x-1)e^x$, $x_0 = 0$,

(b) $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$, $x_0 = 0$,

(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $x_0 = 1$.

**Aufgabe 63** (6 Punkte)**.** Entwickeln Sie arctan in eine Taylorreihe um den Entwicklungspunkt 0 und bestimmen Sie den Konvergenzradius $R$. Konvergiert die Reihe für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| = R$? Bestimmen Sie $\arctan(0,8)$ bis auf einen maximalen Fehler von $0,1$.

*Hinweis: Entwickeln Sie zuerst* $\arctan'$ *in eine Taylorreihe.*

**Aufgabe 64** (6 Punkte)**.** Wir betrachten für $n \geq 1$ die Funktionen

$$f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x}{n^2} e^{-\frac{x}{n}}.$$

(a) Bestimmen Sie die globalen Maxima von $f_n$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

(c) Wenn für eine Funktion $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Limes

$$\lim_{a \to \infty} \int_0^a g(x)dx$$

existiert, dann nennt man

$$\int_0^\infty g(x)dx := \lim_{a \to \infty} \int_0^a g(x)dx$$

ein *uneigentliches Integral.* Bestimmen Sie

$$\int_0^\infty f_n(x)dx.$$

**Aufgabe 65** (6 Punkte)**.** Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p_A$.

(b) Bestimmen Sie Basen der Eigenräume von $A$.

(c) Diagonalisieren Sie $A$, d.h. geben Sie eine Transformationsmatrix $S$ an, so dass $SAS^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist.

**Aufgabe 66** (6 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Ist $A \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ symmetrisch (siehe Definition 10.16), dann hat $A$ nur reelle Eigenwerte.

(b) Für $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ gilt $p_A(0) \neq 0$ genau dann, wenn $A$ die darstellende Matrix eines Isomorphismus ist.

**Aufgabe 67** (Zusatzaufgabe, 6 Extrapunkte)**.** Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

*Abgabe Donnerstag, den 26. Januar, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.*