Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 12

Aufgabe 56 (6 Punkte)**.** Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 57 (6 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_1^a \log(x)dx$$

für $a > 1$ durch Riemannsche Summen. Wählen Sie dazu für $n \geq 1$ die Unterteilung $1 < a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{2}{n}} < ... < a^{\frac{k-1}{n}} < a$ des Intervalls $[1, a]$.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst $\lim_{n\to\infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1)$, *indem Sie den Term mit einem Differenzenquotienten gleichsetzen.*

Aufgabe 58 (6 Punkte)**.** (a) Angenommen $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie für $u = \tan(\frac{x}{2})$, dass

$$\sin(x) = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

(b) Berechnen Sie die unbestimmten Integrale

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx, \quad \int \frac{1}{\cos(x)} dx$$

und bestimmen Sie jeweils den Definitionsbereich.

Hinweis: Es genügt in (b), die unbestimmten Integrale innerhalb von $(-\pi, \pi)$ *zu berechnen. Substituieren Sie* $x = 2\arctan(u)$.

Aufgabe 59 (6 Punkte)**.** Bestimmen jeweils alle lokalen Maxima und Minima der Funktion f und begründen Sie das.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-x^2}$,

(b) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^5(e^x - 1)}$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan(2\cos(x)) - x$.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung, um zu entscheiden, ob f wirklich ein lokales Maximum oder Minimum annimmt.

Aufgabe 60 (6 Punkte)**.** Unter Annahme einer zur Geschwindigkeit proportionalen Dämpfung des harmonischen Oszillators erhalten wir die Differentialgleichung

$$y'' + 2dy' + ky = 0.$$

Dabei ist $d \geq 0$ eine Dämpfungskonstante und $k > 0$ eine Elastizitätskonstante. In Abhängigkeit der Konstanten beschreibt die Gleichung eine *schwache Dämpfung* ($d^2 < k$), *starke Dämpfung* ($d^2 > k$) oder *kritische Dämpfung* ($d^2 = k$). Bestimmen Sie in jedem der drei Fälle alle reellen Lösungen.

Hinweis: Bestimmen Sie zuerst alle komplexen Lösungen.

Aufgabe 61 (Zusatzaufgabe, 6 Extrapunkte)**.** Bestimmen Sie alle positiven Lösungen $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ der *logistischen Differentialgleichung*

$$y' = (a - by)y$$

für $a, b \in \mathbb{R}^+$. Dabei beschreibt $y(t)$ die Größe einer Population und $a - by(t)$ deren Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t \geq 0$.

Hinweis: Finden Sie zuerst eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten in der Variablen z, so dass $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ genau dann eine Lösung der logistischen Differentialgleichung ist, wenn $z = \frac{1}{y}$ eine Lösung der linearen Differentialgleichung ist.

Abgabe Donnerstag, den 19. Januar, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.