Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 11

Aufgabe 51 (6 Punkte)**.** Berechnen Sie zu den Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -5 & 0 & 7 \\ 6 & 2 & -6 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$$

mit den Eigenwerten -1 und 2 jeweils Basen der zugehörigen Eigenräume.

Aufgabe 52 (4 Punkte)**.** Gegeben ist die Matrix

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4, \mathbb{R})$$

mit den Eigenwerten $0, 1, -1$. Geben Sie die geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte an und entscheiden Sie, ob C diagonalisierbar ist.

Aufgabe 53 (6 Punkte)**.** Finden Sie jeweils eine Stammfunktion F zu f und geben Sie den Definitionsbereich von f und F an.

(a) $f(x) = \frac{-x^2+x-2}{x^2-x-12}$,
(b) $f(x) = x\log(1-x^2)$,
(c) $f(x) = xe^x$,
(d) $f(x) = x^3 e^{-x^2}$,
(e) $f(x) = x^2\cos(x)$,
(f) $f(x) = \cos(x)^2$.

Hinweis: Die Aufgaben (b)-(e) können Sie durch partielle Integration lösen. Zeigen Sie für (f), dass $\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2x)+1)$.

Aufgabe 54 (6 Punkte). (a) Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Ar\,sinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \operatorname{Ar\,sinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2+1})$$

die Umkehrfunktion zu sinh ist.

(b) Finden Sie durch Substitution eine Stammfunktion zu

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(c) Berechnen Sie $\operatorname{Ar\,sinh}'$ durch direktes Ableiten und mit Hilfe der Ableitung von Umkehrfunktionen.

(d) Finden Sie durch Substitution eine Stammfunktion zu

$$f : (-1,1) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1-x^2}.$$

Hinweis: Substituieren Sie in (b) und in (d) $x = g(t)$, wobei g eine trigonometrische Funktion ist. Schreiben Sie für (d) die Lösung von Aufgabe 53 (f) als Ausdruck in $\sin(x)$ *und x.*

Aufgabe 55 (6 Punkte). (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{y}, \; y(3) = 4.$$

(b) Bestimmen Sie mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ drei linear unabhängige Lösungen der linearen Differentialgleichung

$$2y^{(3)} + y'' - 7y' - 6y = 0.$$

Abgabe Donnerstag, den 12. Januar, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.