## Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 9

*Sie brauchen in den folgenden Aufgaben die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, die im Abschnitt über Drehmatrizen gezeigt wurden:*

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

*für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. *Anhand der Reihen der Cosinus- und Sinusfunktion können Sie außerdem leicht sehen, dass* $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ *und* $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ *für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 41** (6 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie, dass die Verknüpfung von zwei Spiegelungen eine Drehung ist: $S_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\frac{\beta}{2}} = D_{\alpha-\beta}$.

(b) Angenommen $A$ und $B$ sind $n \times n$-Matrizen über einem Körper $K$, so dass das Matrixprodukt $AB$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass dann auch $A$ invertierbar ist. Gilt dies (und warum) auch für $B$?

**Aufgabe 42** (6 Punkte)**.** (a) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

(b) Berechnen Sie $A^{-1}BA$ und $B^{10}$ für

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}).$$

**Aufgabe 43** (6 Punkte)**.** Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{falls } x \leq 0, \\ 0, & \text{falls } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $f$ auf ganz $\mathbb{R}$ 2-fach stetig differenzierbar ist und berechnen Sie $f'$ und $f''$. Ist $f$ 3-fach differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$?

**Aufgabe 44** (6 Punkte)**.** Rechnen Sie die folgenden Gleichungen und Ungleichungen nach:

(a) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$ und $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(b) $\sin'(x) > 0$ für alle $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\sin'(x) < 0$ für alle $x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$,

(c) $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $\cos(x) \neq 0$, $\cos(y) \neq 0$ und $\cos(x + y) \neq 0$.

**Aufgabe 45** (6 Punkte)**.** (a) Berechnen Sie $\cos(1)$ und $\cos(2)$ anhand der Reihe der Cosinusfunktion bis auf einen Fehler von höchstens $\pm 10^{-2}$ und begründen Sie das.
*Hinweis: Sie können durch Vergleich der positiven und negative Summanden die Restglieder* $r_k(x) := \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ *für* $x = 1$ *und* $x = 2$ *abschätzen.*

(b) Bestimmen Sie für $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{\pi}{3}$ die exakten Werte von $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ als Wurzelausdrücke.
*Hinweis: Finden Sie* $e^{ix}$ *in der komplexen Zahlenebene und argumentieren Sie geometrisch.*

(c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 5\cos(x) + x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ mindestens drei Nullstellen hat.
*Hinweis: Bestimmen Sie das Vorzeichen von* $f(x)$ *für* $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ *und verwenden Sie dann einen Satz aus der Vorlesung.*

Abgabe Donnerstag, den 15. Dezember, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.