Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke

AOR Dr. Thoralf Räsch

Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 8

Aufgabe 36 (6 Punkte)**.** (a) Rechnen Sie nach, dass $ad - bc \neq 0$ für alle Körper K und jede invertierbare Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K).$$

Sie brauchen dafür nur zwei Gleichungen des linearen Gleichungssystems, das Sie erhalten, wenn Sie die Inverse

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, K)$$

mit der gegebenen Matrix multiplizieren. Zeigen Sie im Fall $ad - bc \neq 0$, dass

$$\frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

die Inverse ist.

(b) Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in K \right\}$$

des K-Vektorraums $Mat(n \times n, K)$ für beliebige Körper K. Entscheiden Sie für $K = \mathbb{R}$ und für $K = \mathbb{C}$, ob jede Matrix $M \in U$ mit $M \neq 0$ invertierbar ist.

Aufgabe 37 (6 Punkte)**.** Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf einer Menge M ist eine Relation zwischen Elementen von M mit den folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in M$:

- (Reflexivität) $x \sim x$,
- (Symmetrie) wenn $x \sim y$, dann $y \sim x$, und
- (Transitivität) wenn $x \sim y$ und $y \sim z$, dann $x \sim z$.

Weisen Sie nach, dass die wie folgt definierten Relationen $\sim_n$ und $\sim$ Äquivalenzrelationen sind.

(a) $m \sim_n k$ ist für $m, k \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiert durch: $m \sim_n k$ genau dann, wenn $m - k$ ein ganzzahliges Vielfaches von n ist.

(b) Angenommen V ist ein K-Vektorraum und U ist ein Unterraum von V. $x \sim y$ ist für $x, y \in V$ definiert durch: $x \sim y$ genau dann, wenn $x - y \in U$.

Aufgabe 38 (6 Punkte)**.** Entscheiden und begründen Sie mit Hilfe der Definition der Stetigkeit oder des ϵ-δ-Kriteriums, an welchen Stellen $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen stetig sind.

(a) die Betragsfunktion $|.| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(b) $sign : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $sign(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ 1 & \text{falls } x > 0 \end{cases}$,

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x]$, wobei $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leq x$ bezeichnet.

Aufgabe 39 (6 Punkte)**.** In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Partialsummen der harmonischen Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ beliebig groß werden.

(a) Rechnen Sie mit Hilfe des Quotientenkriteriums nach, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ für alle $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < 1$ absolut konvergiert. Was ist der Grenzwert der dort vorkommenden Quotienten?

(b) Begründen Sie durch Abschätzung nach unten, dass die Partialsummen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und die Partialsummen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ beliebig groß werden.

(c) Beschreiben Sie, wie man $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...)$ so zu $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...)$ umordnen kann, dass die Partialsummen von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ negative Werte von beliebig großem Betrag annehmen.

Aufgabe 40 (6 Punkte)**.** Das Supremum $\sup(A)$ einer nach oben beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ ist definiert als die kleinste obere Schranke von A, d.h. als das kleinste $y \in \mathbb{R}$, so dass $x \leq y$ für alle $x \in A$. Analog dazu ist das Infimum $\inf(A)$ einer nach unten beschränkten Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert als die größte untere Schranke von A. Sie können leicht sehen, dass das Supremum einer endlichen Menge von reellen Zahlen deren größtes Element ist und dass das Infimum einer endlichen Menge reeller Zahlen deren kleinstes Element ist. Skizzieren Sie jeweils die Menge A, bestimmen Sie $\sup(A)$ und $\inf(A)$ und verifizieren Sie die Definition von Supremum und Infimum.

(a) $A = \{(-\frac{1}{2})^n : n \in \mathbb{N}\}$,

(b) $A = \{\frac{n+2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$,

(c) $A = \{-\exp(x) : x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$.

Abgabe Donnerstag, den 08. Dezember, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.