Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 7

Aufgabe 31 (6 Punkte). (a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind, indem Sie die Definition von linearer Unabhängigkeit prüfen. Sie können hier und in (b) Sätze über Basen und Dimension aus der Vorlesung verwenden.

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Wir betrachten

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \; v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie nach, dass B linear unabhängig ist. Begründen Sie, dass B eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist. Ersetzen Sie gemäß dem Basisaustauschsatz zwei Vektoren aus B durch die Vektoren v_1 und v_2, so dass Sie eine Basis erhalten.

Aufgabe 32 (6 Punkte). Entscheiden Sie jeweils, ob die Abbildung f linear ist, indem Sie die Definition der Linearität prüfen. Wenn nichts anderes gesagt wird, fasst man K^n immer als K-Vektorraum auf. Erinnern Sie sich daran, dass man zum Beispiel $\mathbb{C}$ auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\{1, i\}$ auffassen kann.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (y, y, \sqrt{2}x)$,
(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (x, y, xy - 1)$,
(c) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, f(u, v, w, x) = u - w$,
(d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, f(x, y) = (y, x)$ für $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum,
(e) $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f(x) = Re(x) + Im(x)$ für $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum,
(f) $f : Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R},\ f(g) = g(4)$.

Aufgabe 33 (6 Punkte)**.** Die linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $g : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ sind gegeben durch die darstellenden Matrizen

$$DM(f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad DM(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie $Kern(f)$ durch lösen des entsprechenden linearen Gleichungssystems und bestimmen Sie eine Basis von $Kern(f)$. Geben Sie eine Erzeugendensystem von $Bild(g)$ an und bestimmen Sie eine Teilmenge davon, die eine Basis von $Bild(g)$ ist. Bestimmen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes die Dimensionen von $Bild(f)$ und $Kern(g)$.

Aufgabe 34 (6 Punkte)**.** Wir betrachten die Basis

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{C}^3$. Denken Sie daran, dass wir durch beliebige Werte auf den Basisvektoren eine lineare Abbildung definieren können.

(a) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $DM(f)$ der linearen Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$, die gegeben ist durch

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad f(v_3) = \begin{pmatrix} i \\ 3i \end{pmatrix}.$$

(b) Wie viele lineare Abbildungen $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ mit

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

gibt es?

Aufgabe 35 (6 Punkte)**.** Die Funktionen Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus sind für $x \in \mathbb{C}$ definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh(z) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Sie können leicht sehen, dass $\cosh(-x) = \cosh(x)$ und $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{C}$ und $\cosh(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und rechnen Sie mit Hilfe der Eigenschaften der Exponentialfunktion für alle $x, y \in \mathbb{C}$ nach:

(a) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$,
(b) $\cosh(x + y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$,
(c) $\sinh(x + y) = \cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y)$.

Abgabe Donnerstag, den 01. Dezember, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.