Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 5

Aufgabe 21 (6 Punkte).

(a) Berechnen Sie den Schnitt $U \cap V$ der Unterräume $U := \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 | \ v_1 + iv_2 = 0\}$ und $V := \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 | \ 2v_1 - v_2 + iv_3 = 0\}$ des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^3$ und geben Sie eine Basis von $U \cap V$ an.

(b) Geben Sie eine Basis des Unterraums $U := \{(v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Q}^3 : 2v_1 + 3v_2 = v_3\}$ des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^3$ an.

(c) Entscheiden Sie, ob $U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \ f(1) = 0\}$ und $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} | \ f(1) > 0\}$ Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f | \ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ sind.

Aufgabe 22 (6 Punkte).

(a) Geben Sie Basen von $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und als $\mathbb{R}$-Vektorraum an und begründen Sie dies.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: wenn in einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V die Vektoren v_1, v_2 und v_3 linear unabhängig sind, dann sind auch die Vektoren $w_1 := v_1 + iv_2 + iv_3$, $w_2 := v_1 - v_2 + iv_3$ und $w_3 := v_1 - iv_2 + v_3$ linear unabhängig.

Aufgabe 23 (6 Punkte). Angenommen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge komplexer Zahlen. Die *komplex konjugierte* Zahl $\overline{x}$ zu x ist definiert durch $\overline{x} = \mathrm{Re}(x) - i \cdot \mathrm{Im}(x)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Re}(x+y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y)$, $\mathrm{Im}(x+y) = \mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y)$ und $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(x_n) = \mathrm{Re}(x)$ und $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(x_n) = \mathrm{Im}(x)$.

(c) Wenn $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$, dann ist $\lim_{n\to\infty}(\overline{x_n}) = \overline{x}$.

Schreiben Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(d) $(4 + 3i) \cdot x = 10 - 5i$,

(e) $x^2 = 1 + i$,

(f) $x^3+(7-2i)x^2+(15-9i)x+10-10i = 0$. Finden Sie eine kleine ganzzahlige Lösung x_0 und dividieren Sie durch $(x - x_0)$.

Aufgabe 24 (6 Punkte)**.** Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5(n+3)}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{3^n}$

Aufgabe 25 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen für beliebige geordnete Körper $(K, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1, <)$ und $a, b \in K$ nur unter Benutzung der Axiome für geordnete Körper. Geben Sie für jeden Schritt an, welche Axiome Sie verwenden.

(a) Es gibt genau ein $c \in K$ mit $a + c = 0$.

(b) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$. Sie können verwenden, dass $c \cdot 0 = 0$ für alle $c \in K$.

(c) Für $a > 0$ ist $f_a : K \setminus \{0\} \to K \setminus \{0\}$, $f_a(x) = x \cdot a$ bijektiv und strikt monoton wachsend, d.h. für alle $c < d$ in $K \setminus \{0\}$ ist $f_a(c) < f_a(d)$.

(d) Es gibt keine lineare Ordnung $<$ auf $\mathbb{C}$, so dass $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1, <)$ ein geordneter Körper ist.

Abgabe Donnerstag, den 17. November, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung. Bitte notieren Sie auf der ersten Seite Ihrer Abgabe gut lesbar Ihre Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors, heften die Blätter zusammen, und legen sie in die Mappe Ihrer Übungsgruppe. Sie können Ihre Lösungen zusammen mit bis zu zwei anderen Teilnehmern der gleichen Übungsgruppe abgeben.