Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 4

Aufgabe 16 (6 Punkte)**.** (a) Für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$$v_1 = (1, 2, 0) \qquad v_2 = (-1, -1, 1) \qquad v_3 = (-2, 1, t + 4)$$

(b) Geben Sie zu

$$v_1 = (2, 3, 1, 1) \qquad v_2 = (4, 3, 1, 2)$$

zwei kanonische Basisvektoren e_i, e_j des $\mathbb{R}^4$ an, so dass $\{v_1, v_2, e_i, e_j\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet, und begründen Sie dies. Geben Sie zwei kanonische Basisvektoren e_i, e_j des $\mathbb{R}^4$ mit $e_i \neq e_j$ an, so dass $\{v_1, v_2, e_i, e_j\}$ keine Basis des $\mathbb{R}^4$ bildet, und begründen Sie dies.

Aufgabe 17 (6 Punkte)**.** Angenommen, $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ und $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$ sind Polynomfunktionen mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ für $i \leq n$, $a_n > 0$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$.

(a) Zeigen Sie

$$a_n x^n \geq k \cdot |a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}|$$

und $a_n x^n \geq k$ für alle $x \geq x_0$, wobei

$$x_0 = \max\{1, \frac{k}{a_n}, \frac{k}{a_n}(|a_0| + ... + |a_{n-1}|)\}.$$

(b) Zeigen Sie für $b_n = 0$, dass

$$a_n x^n \geq |a_0 + a_1 x + ... + a_{n-1} x^{n-1}| + k \cdot |q(x)|$$

und $p(x) \geq k \cdot |q(x)|$ für alle $x \geq x_1$, wobei

$$x_1 = \max\{1, \frac{k}{a_n}(|a_0| + ... + |a_{n-1}| + |b_0| + ... + |b_{n-1}|)\}.$$

(c) Zeigen Sie für $a_n > b_n$ mit Hilfe von (a) angewandt auf $p(x) - q(x)$ und auf $k + 1$, dass es ein $x_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $p(x) - q(x) \geq k$ für alle $x \geq x_2$.

(d) Zeigen Sie: wenn $p(x) = q(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $a_i = b_i$ für alle $i \leq n$.

Aufgabe 18 (6 Punkte)**.** Auf der Menge $M = \{f|\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ sind $f + g$ und $\lambda \cdot f$ (für $f, g \in M$ und $\lambda \in \mathbb{R}$) definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ und $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit wird M zu einem $\mathbb{R}$-Vektorraum. Wir betrachten die Menge

$$V = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}|\ p(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + a_3x^3,\ a_0, ..., a_3 \in \mathbb{R}\}$$

aller Polynomfunktionen vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$. Im folgenden schreiben wir $a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + a_3x^3$ für die Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x^2 + a_3x^3$. Zeigen Sie:

(a) V ist ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums M.
(b) $\{1, x, x^2, x^3\}$ ist eine Basis von V.
(c) $\{1 + x, (1 + x)^2, x^2, (1 + x)^3\}$ ist eine Basis von V.

Aufgabe 19 (6 Punkte)**.** Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind konvergente Folgen reeller Zahlen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$ für $n \to \infty$.

(a) Zeigen Sie: wenn $a_n \leq b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann ist $a \leq b$. Folgt aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dass $a < b$?
(b) Angenommen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ is eine weitere Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie: wenn $a = b$ und $a_n \leq c_n \leq b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert (c_n) gegen a.

Aufgabe 20 (6 Punkte)**.** Entscheiden Sie jeweils, ob die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie in diesem Fall den Grenzwert.

(a) $x_n = (-2)^n$
(b) $x_n = (\frac{n}{n+1})^2$
(c) $x_n = \frac{n}{2^n} + 2 \cdot (\frac{n}{n+1})^2$
(d) $x_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$
(e) $x_n = \frac{n^2+2n-2}{(n+1)^2}$
(f) $x_n = \frac{n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}$

Abgabe Donnerstag, den 10. November, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung. Bitte notieren Sie auf der ersten Seite Ihrer Abgabe gut lesbar Ihre Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors, heften die Blätter zusammen, und legen sie in die Mappe Ihrer Übungsgruppe. Sie können Ihre Lösungen zusammen mit bis zu zwei anderen Teilnehmern der gleichen Übungsgruppe abgeben.