Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke

AOR Dr. Thoralf Räsch

Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 3

Aufgabe 11 (6 Punkte)**.** (a) Bringen Sie $\frac{1+2i}{3-4i}$ in die Form $a+bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} i^k$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $x^2 - 4x + 5 = 0$.

(d) Die *konjugiert komplexe Zahl* $\bar{z}$ einer komplexen Zahl $z = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ist definiert als $a - ib$. Zeigen Sie $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ für alle $x, y \in \mathbb{C}$.

(e) Begründen oder widerlegen Sie, dass $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden kann.

(f) Begründen oder widerlegen Sie, dass $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum aufgefasst werden kann.

Aufgabe 12 (6 Punkte)**.** Es sei

$$\zeta = \frac{\sqrt{5} - 1 + i\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Schreiben Sie $\zeta^2, \zeta^4, \zeta^5$ und ζ^{100} in der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 13 (6 Punkte)**.** Angenommen, A, B, C sind Mengen und $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cap V)$ für alle Teilmengen $U, V \subseteq B$.

(b) $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = f^{-1}(U \cup V)$ für alle Teilmengen $U, V \subseteq B$.

(c) Wenn f und g injektiv sind, dann ist $g \circ f$ injektiv.

(d) Wenn f und g surjektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv.

(e) Wenn $g \circ f$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(f) Wenn $g \circ f$ surjektiv sind, dann ist g surjektiv.

Aufgabe 14 (6 Punkte)**.** (a) Zeigen Sie $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b > 0$.

(b) Angenommen, $a \in \mathbb{R}$ und $|a| < 1$. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|\sum_{k=0}^{n} a^k - \frac{1}{1-a}| < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$.

Aufgabe 15 (6 Punkte)**.** Für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $n, k \geq 1$ und gegebene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^k$ definieren wir

$$\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n) := \{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \mid \alpha_j \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^k.$$

(a) Zeigen oder widerlegen Sie, dass $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_n)$ für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^k$ ist.

(b) Beschreiben Sie $\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}) \subseteq \mathbb{R}^3$.

(c) Weisen Sie die folgende Mengengleichheit nach (indem Sie beide Menginklusionen prüfen):

$$\mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \mathcal{L}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}).$$

Abgabe Donnerstag, den 03. November, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.

Bitte notieren Sie auf der ersten Seite Ihrer Abgabe gut lesbar Ihre Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors, heften die Blätter zusammen, und legen sie in die Mappe Ihrer Übungsgruppe. Sie können Ihre Lösungen zusammen mit bis zu zwei anderen Teilnehmern der gleichen Übungsgruppe abgeben.