Mathematik für Physiker und Physikerinnen I

Wintersemester 2011-12

Prof. Dr. Peter Koepke
AOR Dr. Thoralf Räsch
Dr. Philipp Schlicht

Übungsaufgaben, Serie 2

Aufgabe 6 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie die folgenden Aussagen für jeden Körper $(K, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ und für alle $x, y \in K$:

(a) $x \cdot y \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \wedge y \neq 0)$,
(b) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,
(c) $(-1) \cdot x = -x$,
(d) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$,
(e) $(x^{-1})^{-1} = x$ für $x \neq 0$,
(f) $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$ für $x, y \neq 0$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und $a \in \mathbb{Z}$ ist $[a]_n$ definiert als das eindeutige $b \in \{0, ..., n-1\}$, so dass $a - b$ durch n teilbar ist. Wir definieren $\oplus_n$ und $\otimes_n$ auf $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, 2, 3, n-1\}$ durch $x \oplus_n y := [x+y]_n$ und $x \otimes_n y := [x \cdot y]_n$.

(a) Fertigen Sie eine Additionstabelle für $(\mathbb{Z}_5, \oplus_5)$ und eine Multiplikationstabelle für $(\mathbb{Z}_5, \otimes_5)$ an.
(b) Zeigen Sie $x \oplus_n (y \oplus_n z) = [x + y + z]_n = (x \oplus_n y) \oplus_n z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$.
(c) Zeigen Sie $x \otimes_n (y \otimes_n z) = [x \cdot y \cdot z]_n = (x \otimes_n y) \otimes_n z$ für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}_n$.
(d) Geben Sie die Funktion $x \mapsto -x$ auf $\mathbb{Z}_n$ an, die das Körperaxiom K3 erfüllt.
(e) Entscheiden Sie, ob jedes $x \in \mathbb{Z}_4 \setminus \{0\}$ ein Inverses bezüglich $\otimes_4$ besitzt.
(f) Entscheiden Sie, ob jedes $x \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ ein Inverses bezüglich $\otimes_5$ besitzt.

Aufgabe 8 (6 Punkte). (a) Entscheiden Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob

$$U_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = a - 1 \}, \quad U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2 \}$$

Unterräume des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ sind und beschreiben Sie U_1 und U_2.

(b) Berechnen Sie $U_3 \cap U_4$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ für

$$U_3 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + 2x_3 = a \}, \; U_4 := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 + x_3 + 2x_1 = a \}$$

und finden Sie $u, v \in \mathbb{R}^3$ mit $U_3 \cap U_4 = \{u + bv : b \in \mathbb{R}\}$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist $U_3 \cap U_4$ ein Unterraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 9 (6 Punkte). Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(a) $\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k$ für alle $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_k \geq 0$ für $1 \leq k \leq n$.

(b) $\prod_{k=1}^{n} (1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$ für alle $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq a_k \leq 1$ für $1 \leq k \leq n$.

Aufgabe 10 (6 Punkte). (a) Zeigen Sie $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie $n! \leq (\frac{n+1}{2})^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ durch vollständige Induktion.

Abgabe Donnerstag, den 27. Oktober, bis 8:25 Uhr in der Vorlesung.

Bitte notieren Sie auf der ersten Seite Ihrer Abgabe gut lesbar Ihre Übungsgruppe und den Namen Ihres Tutors, heften die Blätter zusammen, und legen sie in die Mappe Ihrer Übungsgruppe. Sie können Ihre Lösungen zusammen mit bis zu zwei anderen Teilnehmern der gleichen Übungsgruppe abgeben.