

Mathematik I für Physiker und Physikerinnen

Analysis/Infinitesimalrechnung

math 140, WS 2011/12

VON PETER KOEPKE

Mo, Di 8:25-9:55, HS B, Anatomie, Nußallee 10
(und Lineare Algebra (Thoralf Räsch): Do 8:25-9:55, HS I, PI)
Übungen (Philipp Schlicht): Mi Nachmittag, 3std.

Ziele

Vermittlung der mathematischen Grundbegriffe und Methoden; erforderlich für die Vorlesungen nach dem 1. Semester

Inhalte

Lineare Algebra reelle und komplexe Zahlen, elementare Gruppentheorie, Vektorräume, Skalarprodukt, lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinante, Eigenwerte, Diagonalisierung symmetrischer Matrizen (Hauptachsentransformation), geometrische Interpretation

Analysis Folgen und Reihen, Differentiation und Integration von Funktionen einer Veränderlichen. Gewöhnliche Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungssysteme und deren allgemeine Lösung, einige spezielle Lösungen. Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Literaturhinweis

... O. Forster; Analysis I (Vieweg Wiesbaden)...

Kontakt

Prof. Dr. Peter Koepke, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.005, Sprechstunde Dienstags 12:15 - 13:15

koepke@math.uni-bonn.de

Sekretariat: U. Müller-Moewes, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.011, Tel. 0228-73-2947

mmoewes@math.uni-bonn.de

AOR Dr. Thoralf Räsch, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60

raesch@math.uni-bonn.de

Dr. Philipp Schlicht, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.003

schlicht@math.uni-bonn.de

Homepage

www.math.uni-bonn.de/people/logic/teaching/2011WS/Mathematik_fuer_Physiker.shtml

Übungen

12 Übungsgruppen, 3-stündig, Mittwoch Nachmittag, 13:00-16:00 und 16:00-19:00, Beginn 19.10.2011

Modulprüfung

Klausur, geplant: Donnerstag, 2. Februar. 2012, 8:00-10:00

Nachklausur

Zulassungsvoraussetzung zur Klausur

erfolgreiche Teilnahme an den Übungen, d.h. erfolgreiche Erledigung der wöchentlichen Hausaufgaben und aktive Teilnahme in der Übungsgruppe

Hausaufgaben

Donnerstag auf der Homepage, erstmals 13.10. Abgabe eine Woche später

Anmeldeformalitäten für die Modulprüfungen

siehe <https://basis.uni-bonn.de>

Einleitung

1. Newtonsches Gesetz: $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

2. Newtonsches Gesetz: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (\vec{s})''$

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

Hookesches Gesetz (Federgesetz): $\vec{F} = D \cdot \vec{s}$

Elastische Schwingung:

$$D \cdot s(t) = F_{\text{Feder}}(t) = -F_{\text{Trägheit}}(t) = -m \cdot s''(t) = -m \cdot \frac{d^2}{dt^2} s(t)$$

$$s(t) = -\frac{m}{D} \cdot s''(t)$$

Die *Differentialgleichung* $s'' = -\frac{D}{m} s$ wird gelöst durch

$$s(t) = c \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t - \varphi_0\right)$$

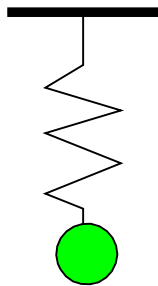
Beweis.

$$s'(t) = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot c \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{m}{D}} t - \varphi_0\right)$$

$$s''(t) = -\sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot c \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{m}{D}} t - \varphi_0\right) = -\frac{m}{D} \cdot s(t)$$

□

Physik



Feder mit
Federkonstante D

Masse m

Modellieren



Mathematik

$$\vec{F} = D \cdot \vec{s}$$

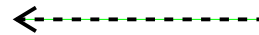
$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

$$\vec{F} = m \cdot (\vec{s})''$$

Rechnen
Beweisen



Interpretieren



Amplitude c

Frequenz $\sqrt{\frac{D}{m}}$

Phasenverschiebung φ_0

$$s(t) = c \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{D}{m}} t - \varphi_0\right)$$

Mathematik ist grundlegender Teil
der physikalischen
Sprache und Methodik

Analysis

- Differential- und Integralrechnung
- **Infinitesimalrechnung**
- engl. Calculus = (formaler) Kalkül

Unendliche Reihen??

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \dots$$

Unendlich kleine Elemente??

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Voraussetzungen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ist die Menge der **natürlichen Zahlen**.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ ist die Menge der **ganzen Zahlen**.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge der **rationalen Zahlen**.

\mathbb{R} ist die Menge der **reellen Zahlen**.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Auf diesen Mengen sind die algebraischen Operationen

Addition ($x + y$), **Multiplikation** ($x \cdot y$) und **Exponentiation** (x^y) gegeben.

Weiterhin sind die **Relationen** $x < y$ und $x \leq y$ gegeben.

1. Vollständige Induktion

Das Prinzip (Axiom) der vollständigen Induktion.

Sei $A(n)$ eine Aussage in der Variablen n .

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl.

(Induktionsanfang) Angenommen $A(n_0)$ gilt.

(Induktionsschluss) Angenommen für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ folgt $A(n + 1)$ aus $A(n)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $\geq n_0$.

Das Prinzip ist anschaulich klar.

Wenn man \mathbb{Z} mengentheoretisch definiert, lässt sich das Prinzip beweisen.

Beispiel

Satz 1. *Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (*)$$

Beweis. $(*)$ ist eine Aussage $A(n)$ in der Variablen n .

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n_0 = 1$:

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Induktionsschluss: Angenommen $n \geq n_0$ und $A(n)$ gelte. Dann ist

$$\begin{aligned}
 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
 &= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
 \end{aligned}$$

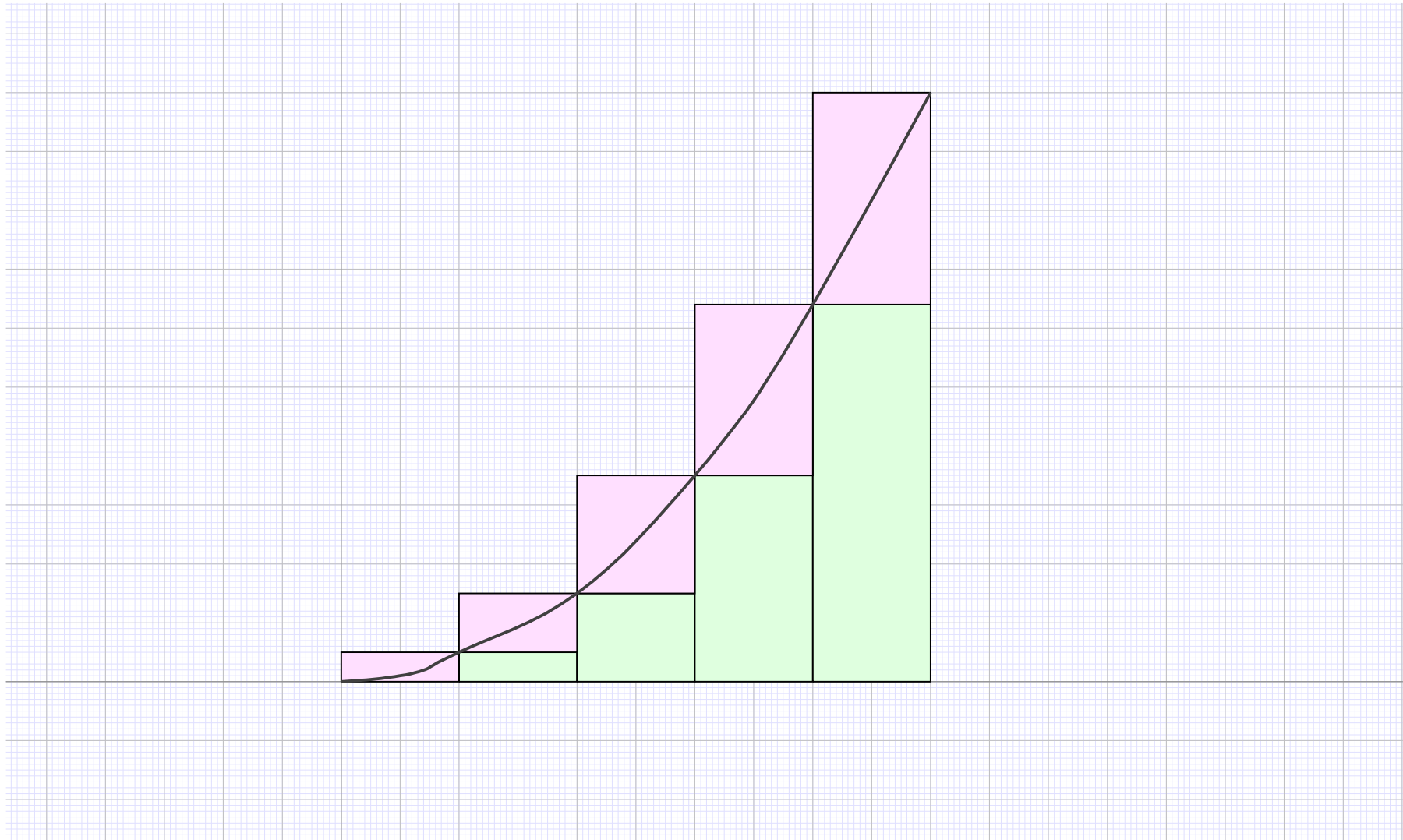
Also gilt $A(n+1)$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt $(*)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$. □

Bemerkung

$$\int_0^1 x^2 dx$$

ist der Inhalt der Fläche, die von der x -Achse, der Geraden $x = 1$ und der Parabel x^2 gebildet wird. Anschaulich gilt:

$$\frac{1}{n} \left(\left(\frac{0}{n} \right)^2 + \left(\frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n} \right)^2 \right) \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n} \right)^2 + \left(\frac{2}{n} \right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n} \right)^2 \right)$$



$$\frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$$

$$\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1)(2n-2)}{6} \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n+1)(2n+2)}{6} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Da $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$ von unten und oben „beliebig nah“ gegen 1 gehen, gilt:

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Definition durch Rekursion (Induktion)

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt

Das Prinzip der rekursiven Definition.

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl.

(Rekursionsanfang) Sei das (mathematische) Objekt $F(n_0)$ definiert.

(Rekursionsregel) Es gibt eine Definition, die für alle ganzen Zahlen $n \geq n_0$ $F(n+1)$ aus $F(n)$ definiert.

Dann ist $F(n)$ für alle ganzen Zahlen $\geq n_0$ definiert.

Definition 2. *Definiere die Funktion $n!$ (sprich: n **Fakultät**) durch Rekursion über n mit dem Rekursionsanfang*

$$0! = 1$$

und der Rekursionsregel

$$(n + 1)! = (n + 1) \cdot (n!).$$

Anschaulich:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n - 1)! \\ &= n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! \\ &\quad \vdots \\ &= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n \end{aligned}$$

Definition 3. Für ganze Zahlen a, b definiere die **mehrfache Summe**

$$\sum_{i=a}^b x_i,$$

auch geschrieben $x_a + \dots + x_b$ durch Rekursion über $b \geq a$ mit Rekursionsanfang

$$\sum_{i=a}^a x_i = x_a$$

und Rekursionsregel

$$\sum_{i=a}^{a+1} x_i = \left(\sum_{i=a}^a x_i \right) + x_{a+1}.$$

Für $b < a$ setze weiter $\sum_{i=a}^b x_i = 0$.

Damit ist

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Definition 4. Für ganze Zahlen a, b definiere das **mehrfache Produkt**

$$\prod_{i=a}^b x_i,$$

auch geschrieben $x_a \cdot \dots \cdot x_b$ durch Rekursion über $b \geq a$ mit Rekursionsanfang

$$\prod_{i=a}^a x_i = x_a$$

und Rekursionsregel

$$\prod_{i=a}^{a+1} x_i = \left(\prod_{i=a}^a x_i \right) \cdot x_{a+1}.$$

Für $b < a$ setze weiter $\prod_{i=a}^b x_i = 1$.

Damit ist

$$\prod_{i=1}^n i = n!$$

Rechenregeln für mehrfache Summen und Produkte

Proposition 5. („Assoziativgesetz“) Für alle ganzen Zahlen $a \leq b \leq c$ und reelle Zahlen x_i gilt

$$\sum_{i=a}^c x_i = \sum_{i=a}^b x_i + \sum_{i=b+1}^c x_i$$

und

$$\prod_{i=a}^c x_i = \prod_{i=a}^b x_i \cdot \prod_{i=b+1}^c x_i$$

Anschaulich:

$$x_a + \dots + x_c = (x_a + \dots + x_b) + (x_{b+1} + \dots + x_c)$$

und

$$x_a \cdot \dots \cdot x_c = (x_a \cdot \dots \cdot x_b) \cdot (x_{b+1} \cdot \dots \cdot x_c).$$

Proposition 6. („Kommutativgesetz“) Für alle ganzen Zahlen $a \leq b$ und reelle Zahlen x_i, y_i gilt

$$\sum_{i=a}^b (x_i + y_i) = \sum_{i=a}^b x_i + \sum_{i=a}^b y_i$$

und

$$\prod_{i=a}^b (x_i \cdot y_i) = \prod_{i=a}^b x_i \cdot \prod_{i=a}^b y_i$$

Anschaulich:

$$(x_a + y_a) \dots + (x_b + y_b) = (x_a + \dots + x_b) + (y_a + \dots + y_b)$$

und

$$(x_a \cdot y_a) \cdot \dots \cdot (x_b \cdot y_b) = (x_a \cdot \dots \cdot x_b) \cdot (y_a \cdot \dots \cdot y_b).$$

Proposition 7. („Distributivgesetz“, „Ausmultiplizieren“) Für alle ganzen Zahlen $a \leq b$, $c \leq d$ und reelle Zahlen x_i , y_j und λ gilt

$$\lambda \cdot \sum_{j=c}^d y_j = \sum_{j=c}^d \lambda y_j$$

und

$$\sum_{i=a}^b x_i \cdot \sum_{j=c}^d y_j = \sum_{i=a}^b \sum_{j=c}^d x_i y_j$$

Anschaulich:

$$(x_a + \dots + x_b) \cdot (y_c + \dots + y_d) = (x_a \cdot y_c + \dots + x_b \cdot y_d).$$

Diese Gesetze kann man auch mit dem Prinzip der vollständigen Induktion zeigen.

Etwas Kombinatorik

Definition 8. Für natürliche Zahlen n und k definiere den **Binomialkoeffizienten**

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} = \prod_{i=1}^k \frac{n-i+1}{i}.$$

Proposition 9. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)) \cdot ((n-k) \cdot \dots \cdot 1)}{(k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1) \cdot ((n-k) \cdot \dots \cdot 1)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

□

Satz 10. Sei $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ eine Menge mit paarweise verschiedenen Elementen, $n \geq 1$. Eine k -Folge aus X ist eine Folge (y_1, \dots, y_k) wobei jedes y_i Element von X ist. Eine Folge kann auch Wiederholungen $y_i = y_k$ haben.

a) Es gibt genau n^k (verschiedene) k -Folgen aus X .

b) Es gibt genau

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n + 1 - k) = \prod_{i=1}^k (n + 1 - i)$$

k -Folgen ohne Wiederholungen aus X .

c) Es gibt genau $n!$ **Permutationen** von X , d.h. n -Folgen aus X ohne Wiederholungen.

d) Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von X mit genau k Elementen.

Beweis. a) Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (-beginn, -verankerung): $k = 0$.

Es gibt genau *eine* 0-Folge aus X , nämlich die leere Folge $()$. Da $n^0 = 1$, gilt die Eigenschaft für $k = 0$.

Induktionsschluss (-schritt): Sei $k \geq 0$ und die Eigenschaft gelte für k . Dann ist

$$F_{k+1} = \{(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}) \mid (y_1, \dots, y_k) \text{ ist eine } k\text{-Folge aus } X, y \in X\}$$

die Menge der $k + 1$ -Folgen aus X . Da es nach der Induktionsvoraussetzung n^k k -Folgen aus X gibt, und da X n Elemente hat, hat F_{k+1}

$$n^k \cdot n = n^{k+1}$$

Elemente, womit die Eigenschaft auch für $k + 1$ gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt a) für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) *Induktionsanfang* (-beginn, -verankerung): $k = 0$.

Es gibt genau *eine* 0-Folge aus X , nämlich die leere Folge $(\)$. Diese Folge ist wiederholungsfrei. Da $\prod_{i=1}^0 (n + 1 - k) = 1$, gilt die Eigenschaft für $k = 0$.

Induktionsschluss (-schritt): Sei $k \geq 0$ und die Eigenschaft gelte für k . Dann ist

$$F'_{k+1} = \{(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}) \mid y_{k+1} \in X, (y_1, \dots, y_k) \text{ ist wiederholungsfreie } k\text{-Folge aus } X \setminus \{y_{k-1}\}\}$$

die Menge der wiederholungsfreien $k + 1$ -Folgen aus X . Es gibt genau n verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von y_{k+1} und nach Induktionsvoraussetzung $(n - 1) \cdot \dots \cdot ((n - 1) + 1 - k) = (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k) = \prod_{i=1}^k (n - i)$ wiederholungsfreie k -Folgen aus $X \setminus \{y_{k-1}\}$. Damit hat F'_{k+1} genau

$$n \cdot [(n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k)] = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k) = \prod_{i=1}^{k+1} (n + 1 - i)$$

Elemente, d.h., die Eigenschaft gilt für $k + 1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Eigenschaft für alle $k \in \mathbb{N}$.

$c)$ ist ein Spezialfall von $b)$ mit $k = n$. Es gibt genau

$$\prod_{i=1}^n (n + 1 - i) = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Permutationen von X .

d) Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von X mit genau k Elementen. Sei P die Menge der Teilmengen von X , die genau k Elemente haben, sei $\text{card}(P)$ die Anzahl der Elemente von P (die „Kardinalität“). Sei F' die Menge der wiederholungsfreien k -Folgen aus X . Dann ist

$$F' = \{((y_1, \dots, y_k) | Y \in P, (y_1, \dots, y_k) \text{ ist wiederholungsfreie } k\text{-Folge aus } Y)\}.$$

Nach c) ist $\text{card}(F') = \text{card}(P) \cdot k!$. Nach b) ist

$$\text{card}(P) = \frac{\text{card}(F')}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n+1-k)}{k!} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

□

Größenordnungen

$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720, 7! = 5040, \dots$

$10! \approx 3 \cdot 10^6, 20! \approx 2 \cdot 10^{18}, 100! \approx 10^{158}, \dots$

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion n^k , für jedes feste $k \geq 1$: wenn $n > 2k$, dann

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot \dots \cdot (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1 \\ &\geq (k+1) \cdot (n \cdot 1) \cdot ((n-1) \cdot 2) \cdot ((n-2) \cdot 3) \cdot \dots \cdot ((n-k+1) \cdot k) \\ &\geq (k+1) \cdot \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_k \\ &> n^k \end{aligned}$$

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion k^n , für jedes feste $k \geq 2$: wenn $n > 2k^2$, dann ist $n - \frac{n}{2} > k^2$, $n - k^2 > \frac{n}{2}$ und

$$\begin{aligned}
 n! &= n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (k^2+1) \cdot k^2 \cdot \dots \cdot 1 \\
 &> \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (k^2+1)}_{n-k^2} \\
 &\geq \underbrace{k^2 \cdot \dots \cdot k^2}_{\substack{n \\ > \frac{n}{2}}} \\
 &> k^n
 \end{aligned}$$

Andererseits ist für alle $n \geq 2$:

$$n! = 1 \cdot \dots \cdot n < \underbrace{n \cdot \dots \cdot n}_n = n^n$$

Nach Satz 10 d) gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

6-elementige Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, \dots, 49\}$.

Um 6 Richtige bei 6 aus 49 mit einer mittleren Gewinnausschüttung von 500000 Euro zu tippen, müssen durchschnittlich ca. 14 Millionen Tipps zum Preis von 14 Millionen Euro abgegeben werden.

Satz 11. Für $1 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

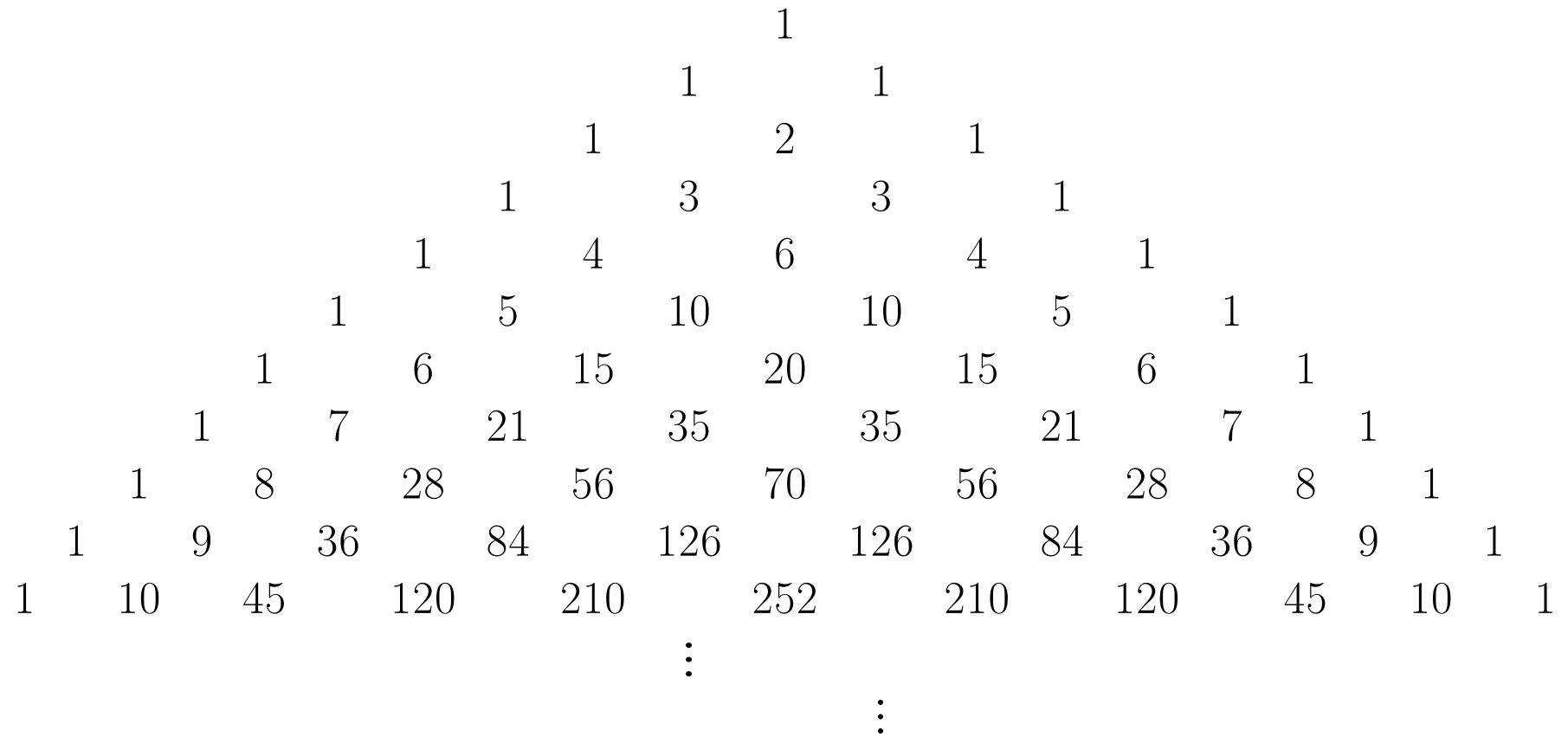
Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{(k-1) \cdot \dots \cdot 1} + \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k)}{k \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) \cdot [k+n-k]}{k \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k \cdot \dots \cdot 1} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

□

Das Pascalsche Dreieck

Die Binomialkoeffizienten bilden das **Pascalsche Dreieck**.



Ein Eintrag im Pascalschen Dreieck zählt die Anzahl der Wege von der Spitze des Dreiecks bis zu dem Eintrag, wenn man an jeder Stelle des Weges halblinks oder halbrechts nach unten geht. Die Zahl 210 in der untersten Reihe des Bildes bedeutet, dass es genau 210 verschiedene Wege gibt, bei denen 6 Mal halblinks und 4 Mal halbrechts gegangen wird.

Stochastische Interpretationen des Pascalschen Dreiecks: wenn die Entscheidung zwischen halblinks oder halbrechts zufällig mit den Wahrscheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ ist, so ist jeder Weg der Länge 10 gleich wahrscheinlich.

Bei 10 Würfeln einer fairen Münze mit Kopf und Zahl ist das Ergebnis oder die Zufallsvariable „Anzahl Kopf“ folgendermaßen verteilt:

Anzahl „Kopf“	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Die Zufallsvariable „Kopf“ ist **binomial verteilt**.

Die binomische Formel

Satz 12. Für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen x, y :

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \quad (*)$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über n .

Induktionsanfang:

$$(x + y)^0 = 1 = \binom{1}{1} x^0 y^0 = \sum_{i=0}^0 \binom{0}{i} x^{0-i} y^i.$$

Induktionsschluss: Die binomische Formel (*) gelte für n . Dann ist

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y) \cdot (x + y)^n \\ &= (x + y) \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i + y \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \\
&= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} x^{n-i} y^{i+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^{n-i+1} y^i + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i-1} x^{n-i+1} y^i + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{i=1}^n \left(\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} \right) x^{n-i+1} y^i + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} y^0 + \sum_{i=1}^n \binom{n+1}{i} x^{(n+1)-i} y^i + \binom{n+1}{n+1} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} x^{(n+1)-i} y^i
\end{aligned}$$

Damit gilt die binomische Formel für $n + 1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Satz. \square

Folgerung 13. Für alle natürlichen Zahlen n und alle reellen Zahlen x, y :

$$(x - y)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} y^i \quad (*)$$

Spezialfälle

- $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
- $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x + y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = (1 + 1)^n = 2^n$
- $\sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots \pm \binom{n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^{n-i} (-1)^i = (1 - 1)^n = 0$

Die geometrische Reihe

Satz 14. Für alle natürlichen Zahlen k und alle reellen Zahlen $q \neq 1$ ist die (endliche) geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^k q^i = 1 + q^1 + \dots + q^k = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Beweis. *Induktionsanfang:* Für $k = 0$:

$$\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 = \frac{q^1 - 1}{q - 1} = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1}$$

Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für k . Dann ist

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \left(\sum_{i=0}^k q^i \right) + q^{k+1} = \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1} + q^{k+1} = \frac{q^{k+1} - 1 + q^{k+2} - q^{k+1}}{q - 1} = \frac{q^{k+2} - 1}{q - 1}$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt der Satz. □

Körper

Die reellen Zahlen \mathbb{R} erfüllen die folgenden **Körperaxiome**:

K1: $x + (y + z) = (x + y) + z$ (*Assoziativgesetz* der Addition)

K2: $x + 0 = x$ (0 ist das *neutrale Element* der Addition)

K3: $x + (-x) = 0$ ($-x$ ist das *inverse Element* zu x bzgl. der Addition)

K4: $x + y = y + x$ (*Kommutativgesetz* der Addition)

K5: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ (*Assoziativgesetz* der Multiplikation)

K6: $x \cdot 1 = x$ (1 ist das *neutrale Element* der Multiplikation)

K7: $x \neq 0 \rightarrow x \cdot x^{-1} = 1$ (x^{-1} ist das *inverse Element* zu x bzgl. der Multiplikation)

K8: $x \cdot y = y \cdot x$ (*Kommutativgesetz* der Multiplikation)

K9: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (*Distributivgesetz*)

K10: $0 \neq 1$

Definition 15. *Eine Struktur $(S, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ ist ein **Körper**, wenn sie die Körperaxiome K1-K10 erfüllt. Dabei kann die Trägermenge S verschieden von \mathbb{R} sein, sowie $+, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1$ verschieden von den reellen Operationen.*

Ein Körper erfüllt einfache Rechenregeln und ist gegenüber Subtraktion und Division abgeschlossen.

Satz 16. *$(\mathbb{R}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ und $(\mathbb{Q}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ sind Körper. $(\mathbb{Z}, +, \cdot, -, 0, 1)$ und $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ sind keine Körper.*

Beweis. Auf der Menge $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gibt es keine $^{-1}$ -Funktion. Auf der Menge \mathbb{N} gibt es keine $-$ -Funktion. □

Wir werden bald den Körper $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ der komplexen Zahlen einführen, der in gewisser Weise bessere Abschlusseigenschaften als \mathbb{R} besitzt.

Satz 17. *Die folgenden Behauptungen folgen aus den Körperaxiomen*

a) $-0 = 0$

b) $-(-x) = x$

c) $-(x + y) = (-x) + (-y)$

d) $x \cdot 0 = 0$

e) $x \neq 0 \rightarrow x^{-1} \neq 0$

f) $x \cdot y = 0 \rightarrow x = 0$ oder $y = 0$

g) $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

h) $(-1) \cdot x = -x$

i) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ („minus mal minus ist plus“)

j) Für alle $x, y \neq 0$ ist $(x^{-1})^{-1} = x$ und $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$

Beweis. a) $-0 \stackrel{K2}{=} (-0) + 0 \stackrel{K4}{=} 0 + (-0) \stackrel{K3}{=} 0.$

b) $-(-x) = -(-x) + 0 = -(-x) + x + (-x) = -(-x) + (-x) + x = (-x) + (-(-x)) + x = 0 + x = x + 0 = x.$

c) $-(x + y) = -(x + y) + x + (-x) + y + (-y) = - (x + y) + (x + y) + (-x) + (-y) = (-x) + (-y).$

d) $x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0 + (- (x \cdot 0)) = x \cdot (0 + 0) + (- (x \cdot 0)) = x \cdot 0 + (- (x \cdot 0)) = 0.$

e) Sei $x \neq 0$. Angenommen $x^{-1} = 0$. [Wir wollen diese Annahme zum Widerspruch führen und damit $x^{-1} \neq 0$ beweisen.] Dann gilt:

$$1 = x \cdot x^{-1} = x \cdot 0 = 0$$

Das aber widerspricht dem Axiom K10: $0 \neq 1$. □

Definition 18. Sei $(S, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1)$ ein Körper. Für $x, y \in S$ definiere

- die **Differenz** $x - y = x + (-y)$
- falls $y \neq 0$ den **Quotienten** $\frac{x}{y} = x \cdot (y^{-1})$
- für $n \in \mathbb{N}$ die **Potenz** x^n rekursiv

$$x^0 = 1 \text{ und } x^{n+1} = (x^n) \cdot x$$

- falls $x \neq 0$ für $m \in \mathbb{Z}$ mit $m < 0$ die **Potenz**

$$x^m = \left(\frac{1}{x}\right)^{-m}.$$

Satz 19. Die Exponentiation erfüllt folgende Gesetze:

a) für $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n = \prod_{i=1}^n x = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_n$

b) $(x^m) \cdot (x^n) = x^{m+n}$

c) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

d) $(x^m) \cdot (y^m) = (x \cdot y)^m$

e) die binomische Formel $(x - y)^n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$

Beweis. Durch vollständige Induktion. Man beachte, dass im Beweis der binomischen Formel nur die Körperaxiome benutzt wurden. \square

Für arithmetische Ausdrücke / Terme benutzen wir die üblichen Schreibweisen: Weglassen von Multiplikationspunkten und redundanten Klammern, Operatorpräzedenz („Punktrechnung geht vor Strichrechnung“): z.B.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

In der (Linearen) **Algebra** werden Strukturen betrachtet, die nur einen Teil der Axiome erfüllen.

Eine Struktur $(G, +', -', 0')$, die die Axiome K1-K3 erfüllt, ist eine **Gruppe**.

Beispiel. Die Menge der Permutationen der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ bildet die **symmetrische Gruppe** $\mathcal{S}_n = (\mathcal{S}_n, \circ, {}^{-1}, \text{id})$. Die Verknüpfung zweier Permutation ist definiert als

$$(a_1, \dots, a_n) \circ (b_1, \dots, b_n) = (a_{b_1}, a_{b_2}, \dots, a_{b_n})$$

Z.B. ist $(4, 3, 2, 1) \circ (2, 1, 4, 3) = (3, 4, 1, 2)$. Das Inverse einer Permutation ist definiert als

$$(a_1, \dots, a_n)^{-1} = (b_1, \dots, b_n),$$

wobei $a_{b_1} = 1, a_{b_2} = 2, \dots, a_{b_n} = n$. Die „neutrale“ Permutation ist die Identität

$$\text{id} = (1, \dots, n)$$

Eine Struktur $(G, +', -', 0')$, die die Axiome K1-K4 erfüllt, ist eine **kommutative Gruppe**.

Beispiele. Die Strukturen $(\mathbb{R}, +, -, 0)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$, $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ sind kommutative Gruppen.

Die Struktur $\mathcal{S}_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$ ist eine kommutative Gruppe.

Die Vektoren in einem Vektorraum bilden eine kommutative Gruppe

Die Struktur $\mathcal{S}_3 = \{(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1)\}$ ist *keine* kommutative Gruppe, denn

$$(1, 3, 2) \circ (2, 1, 3) = (3, 1, 2)$$

$$(2, 1, 3) \circ (1, 3, 2) = (2, 3, 1)$$

Ordnungen

Die Ordnung $<$ auf der Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen erfüllt die folgenden Axiome einer **linearen Ordnung**:

O1: $x \not< x$ (*Irreflexivität*)

O2: $x < y$ und $y < z \rightarrow x < z$ (*Transitivität*)

O3: $x < y$ oder $x = y$ oder $y < x$ (*Linearität*)

Definition 20. *Eine Struktur $(S, <)$ ist eine (strikte) lineare Ordnung, wenn sie die Axiome O1-O3 erfüllt. Dabei kann die Trägermenge S verschieden von \mathbb{R} sein, sowie $<$ verschieden von dem üblichen $<$.*

$(\mathbb{N}, <)$, $(\mathbb{Z}, <)$, $(\mathbb{Q}, <)$ und $(\mathbb{R}, <)$ sind lineare Ordnungen. Wenn nur die Axiome O1-O2 gelten, spricht man von einer **(strikten) partiellen Ordnung**.

Wir schreiben $x \leq y$ für $(x < y$ oder $x = y)$, und $y > x$ bzw. $y \geq x$ für $x < y$ und $x \leq y$.

Satz 21. Sei $(S, <)$ eine lineare Ordnung. Dann gilt für alle $x, y \in S$ genau eine der Relationen $x < y$, $x = y$ und $y < x$.

Beweis. Nach O3 (Linearität) gilt *mindestens* eine der Relationen.

Angenommen $x < y$ und $x = y$. Dann ist $x < x$, im Widerspruch zu O1 (Irreflexivität).

Angenommen $x = y$ und $y < x$. Dann ist $x < x$, im Widerspruch zu O1 (Irreflexivität).

Angenommen $x < y$ und $y < x$. Nach O2 (Transitivität) ist $x < x$, im Widerspruch zu O1 (Irreflexivität). □

In diesem Beweis wird das Prinzip des **Widerspruchsbeweises** benutzt. Um zu zeigen, dass *nicht* ($x < y$ und $x = y$) wird das *Gegenteil angenommen*, nämlich $x < y$ und $x = y$, und zum *Widerspruch* geführt.

Geordnete Körper

Die reellen Zahlen erfüllen die Axiome für **geordnete Körper**, in denen arithmetische Struktur und Ordnungsstruktur wechselwirken:

$$\text{AK1: } x < y \rightarrow x + z < y + z$$

$$\text{AK2: } 0 < x \text{ und } 0 < y \rightarrow 0 < x y$$

Definition 22. *Eine Struktur $(S, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1, <)$ ist ein geordneter Körper wenn:*

a) $(S, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1)$ ist ein Körper

b) $(S, <)$ ist eine lineare Ordnung

c) $(S, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1, <)$ erfüllt die Axiome AK1 und AK2.

Satz 23. *In einem geordneten Körper gelten:*

a) $x > 0 \leftrightarrow -x < 0$

b) $x < y \leftrightarrow x - y < 0$

c) $x < y$ und $z > 0 \rightarrow xz < yz$

d) $x < y$ und $z < 0 \rightarrow xz > yz$

e) $x \neq 0 \rightarrow x^2 > 0$

f) $1 > 0$

g) $x > 0 \rightarrow x^{-1} > 0$

h) $x > y > 0 \rightarrow x^{-1} < y^{-1}$

i) $y < x < 0 \rightarrow x^{-1} < y^{-1}$

Diese Gesetze sind für den geordneten Körper der reellen Zahlen klar und bekannt. Sie lassen sich abstrakt aus den Axiomen K1-K10, O1-O3 und A1-A2 beweisen.

Beweis. a) Sei $x > 0$.

Angenommen $-x > 0$. Nach AK1 ist dann

$$0 = x + (-x) > x + 0 > 0 + 0 = 0$$

und $0 > 0$. Widerspruch.

Angenommen $-x = 0$. Nach AK1 ist dann

$$0 = x + (-x) > 0 + 0 = 0.$$

Widerspruch.

Also ist $-x < 0$.

Umgekehrt sei $-x < 0$.

Angenommen $x < 0$. Nach AK1 ist dann

$$0 = x + (-x) < 0 + (-x) < 0 + 0 = 0.$$

Widerspruch.

Angenommen $x = 0$. Nach AK1 ist dann

$$0 = x + (-x) = 0 + (-x) < 0 + 0 = 0.$$

Widerspruch.

Also ist $x > 0$.

b) Sei $x < y$. Dann ist $x - y = x + (-y) < y + (-y) = 0$.

Umgekehrt sei $x - y < 0$. Dann ist $x = (x - y) + y < 0 + y = y$.

c) Sei $x < y$ und $z > 0$. Dann ist $y - x > 0$, $yz - xz = (y - x)z > 0$, und $xz < yz$.

d) Sei $x < y$ und $z < 0$. Dann ist $-z > 0$ und $xz - yz = (y - x)(-z) > 0$. Also ist $xz > yz$.

e) Sei $x \neq 0$.

Fall 1. $x > 0$. Dann ist $x^2 = x x > 0$.

Fall 2. $x < 0$. Dann ist $-x > 0$ und $x^2 = (-x)(-x) > 0$.

f) Mit *e)* ist $1 = 1 \cdot 1 > 0$.

g) Sei $x > 0$. Angenommen $x^{-1} < 0$. Dann ist $-x^{-1} > 0$, $-1 = x(-x^{-1}) > 0$ und $1 < 0$. Widerspruch zu *f)*.

h) Sei $x > y > 0$. Angenommen $x^{-1} > y^{-1}$. Dann ist

$$1 = x x^{-1} > y x^{-1} > y y^{-1} = 1,$$

Widerspruch. Also ist $x^{-1} < y^{-1}$.

□

Der Absolutbetrag

Definition 24. Für ein Element x eines geordneten Körpers definiere den (Absolut-)Betrag $|x|$ von x durch

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

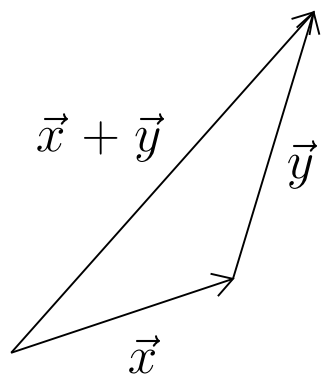
Satz 25.

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- c) $-|x| \leq x \leq |x|$
- d) $|-x| = |x|$
- e) $|xy| = |x||y|$
- f) $|x^n| = |x|^n$
- g) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Satz 26. (Dreiecksungleichung) *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Die Bezeichnung „Dreiecksungleichung“ lässt sich aus der linearen Algebra motivieren, wo man $|\vec{x}|$ als „Länge“ des Vektors \vec{x} interpretieren kann. Die Länge einer Dreiecksseite ist beschränkt durch die Summe der Längen der beiden anderen Dreiecksseiten:



$$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$$

Beweis. Es gilt $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$. Daraus folgt

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

und

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

□

Anwendung der Dreiecksungleichung auf $u = x + y$ und $v = -y$ ergibt

$$|x| = |u + v| \leq |u| + |v| = |x + y| + |-y| = |x + y| + |y|$$

und

$$|x + y| \geq |x| - |y|$$

Satz 27. (Bernoullische Ungleichung) Sei $x \geq -1$ eine reelle Zahl und $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Durch Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Induktionsbeginn:

$$(1 + x)^0 = 1 = 1 + 0 \cdot x.$$

Für den Induktionsschluss sei $n \in \mathbb{N}$ und $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Dann ist

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + x^2 \geq 1 + (n + 1)x$$

Die erste Ungleichheit benutzt, dass $1 + x \geq 0$. □

R ist ein archimedischer Körper

Im Rahmen der Infinitesimalrechnung werden Limes oder Grenzwerte durch Betragsabschätzungen definiert. Wir hatten einleitend das Integral $\int_0^1 x^2 dx$ betrachtet mit der Abschätzung:

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

Wir benötigen, dass die Ausdrücke $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ und $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ für hinreichend große *natürliche* Zahlen beliebig nahe bei 1 liegen, so dass für „kleines“ ε

$$\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 - 1 \right| < \varepsilon$$

Die reellen Zahlen zusammen mit den natürlichen Zahlen erfüllen das **Archimedische Axiom**:

Für alle positiven reellen Zahlen $x, y > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit

$$n x > y.$$

Man nennt die reellen Zahlen auch einen **Archimedischen Körper**.

Mit einer *endlichen* Anzahl von Schritten der Länge x kann man beliebig hoch in den reellen Zahlen kommen. Das ist entscheidend für die Approximation von Integralen, die man sich als „unendliche Summen“ vorstellen kann, durch *endliche* Summen.

Wir zeigen einige Konsequenzen des Archimedischen Axioms.

Satz 28. *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$.*

Beweis. Für $x = 1$ und $y = \frac{1}{\varepsilon}$ liefert das Archimedische Axiom ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann ist $\frac{1}{n} < \varepsilon$. □

Satz 29. Sei $b > 1$ und $K \in \mathbb{R}$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b^n > K$.

Beweis. Sei $b = 1 + x$ mit $x > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nx > K$. Nach der Bernoullischen Ungleichung ist

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx > nx > K.$$

□

Satz 30. Sei $b \in \mathbb{R}$, $|b| < 1$ und sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|b^n| < \varepsilon$.

Beweis. *Fall 1.* $b > 0$. Dann ist $b^{-1} > 1^{-1} = 1$. Nach dem vorangehenden Satz gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(b^n)^{-1} = (b^{-1})^n > \varepsilon^{-1}$. Dann ist $|b^n| = b^n < \varepsilon$.

Fall 2. $b = 0$. Dann ist $|b^1| = |0| < \varepsilon$.

Fall 3. $b < 0$. Wende Fall 1 auf $-b > 1$ an. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $|(-b)^n| < \varepsilon$. Dann ist $|b^n| = |(-b)^n| < \varepsilon$. □

Satz 31. *Zu jeder reellen Zahl x gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl n mit*

$$n \leq x < n + 1 \quad (*)$$

Beweis. Wir zeigen den Satz nur für $x \geq 0$.

(Existenz) Angenommen es gibt keine ganze Zahl mit (*). Dann haben wir: wenn $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq x$, dann ist $n + 1 \leq x$. Dies ist der Induktionsschritt für die Eigenschaft $n \leq x$. Außerdem gilt der Induktionsanfang $0 \leq x$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ dass $n \leq x$. Andererseits gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $n_0 = n_0 \cdot 1 > x$. Das ist ein Widerspruch. Folglich gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq x < n + 1$.

(Eindeutigkeit) Angenommen, es gäbe verschiedene natürliche Zahlen $m < n$ mit

$$m \leq x < m + 1 \text{ und } n \leq x < n + 1.$$

Dann ist $x < m + 1 \leq n \leq x$ und $x < x$. Widerspruch zu O1. □

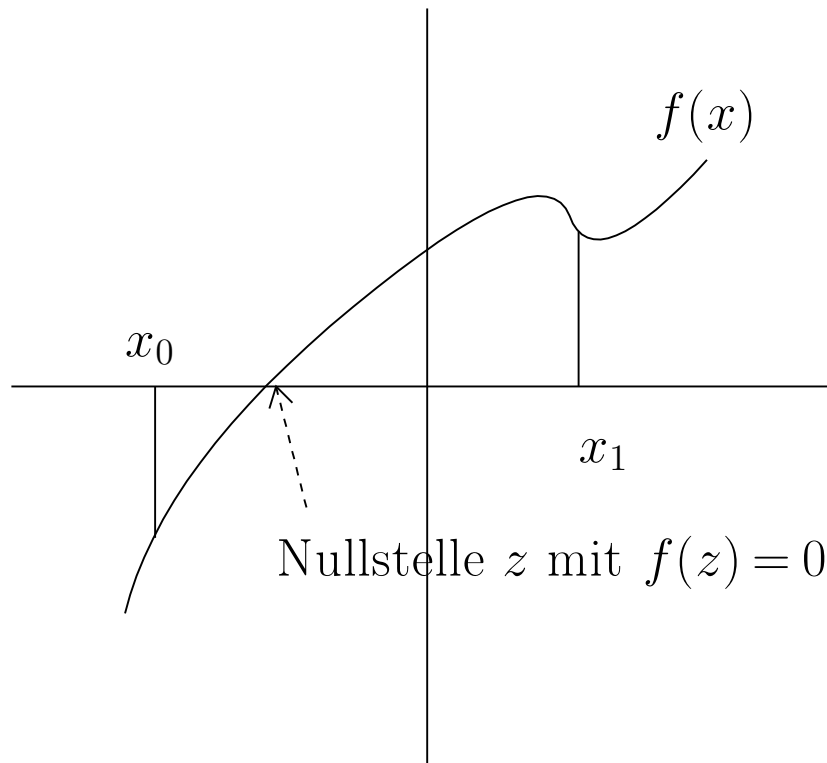
Abschlusseigenschaften von Zahlbereichen

Die Struktur \mathbb{N} der **natürlichen Zahlen** ist der ursprüngliche Zahlbereich.

Die Struktur \mathbb{Z} der **ganzen Zahlen** vervollständigt \mathbb{N} bezüglich der Bildung von Differenzen $x - y$.

Die Struktur \mathbb{Q} der **rationalen Zahlen** vervollständigt \mathbb{Z} bezüglich der Bildung von Quotienten $\frac{x}{y}$ mit $y \neq 0$.

Die Struktur \mathbb{R} der **reellen Zahlen** vervollständigt \mathbb{Q} bezüglich der Existenz von *Nullstellen* gewisser, „stetiger“ Funktionen: Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x_0 \leq x_1$ reelle Zahlen mit $f(x_0) \leq 0$ und $f(x_1) \geq 0$. Dann gibt es eine reelle Zahl z mit $x_0 \leq z \leq x_1$ und $f(z) = 0$ (**Zwischenwertsatz**).



Satz 32. Zu jeder nicht-negativen reellen Zahl $a \geq 0$ existiert eine Quadratwurzel $\sqrt{a} \geq 0$ mit

$$(\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a}) = a$$

Beweis. Sei $f(x) = x^2 - a$. Dann ist $f(0) = -a \leq 0$ und $f(a+1) = a^2 + a + 1 \geq a \geq 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine reelle Zahl $z \geq 0$ mit $f(z) = 0$, d.h.

$$z \cdot z = a.$$

In der Struktur \mathbb{R} besitzen negative Zahlen $b < 0$ keine Quadratwurzeln.

Komplexe Zahlen

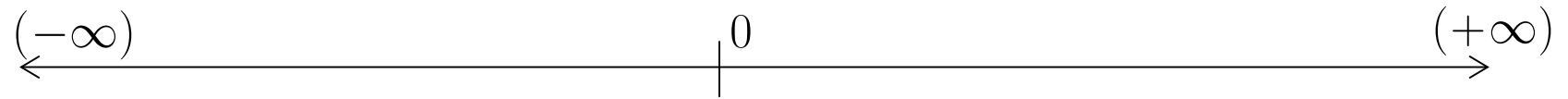
Ursprüngliche Motivation für die Einführung der komplexen Zahlen ist die Forderung nach der Existenz von Quadratwurzeln für *alle* Zahlen. Insbesondere soll es eine Zahl $i = \sqrt{-1}$ mit $i \cdot i = -1$ geben.

i wird die *imaginäre Einheit* genannt.

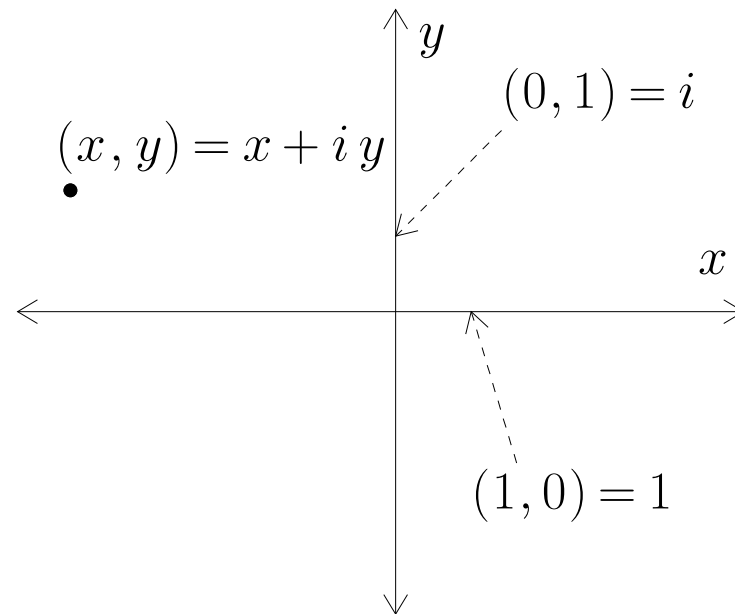
i kann kein Element von \mathbb{R} sein, aber man soll mit i weitgehend wie mit reellen Zahlen rechnen können, z.B.

$$\begin{aligned}(x + i y) \cdot (x' + i y') &= x x' + i x y' + i y x' + \color{red}{i i} y y' \\ &= x x' + i (x y' + y x') + \color{red}{(-1)} y y' \\ &= (x x' - y y') + i (x y' + y x')\end{aligned}$$

Die Menge der reellen Zahlen wird oft als *Zahlengerade* dargestellt:



Die komplexen Zahlen bilden eine *Zahlenebene*, die **komplexe Ebene**:



Definition 33. Die Menge der **komplexen Zahlen** ist die Menge aller geordneten Paare reeller Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ ist $x =: \Re(z)$ der **Realteil** von z und $y =: \Im(z)$ der **Imaginärteil** von z . Definiere Operationen $+$, \cdot , $-$, $^{-1}$ für $(x, y), (x', y') \in \mathbb{C}$ durch

$$\begin{aligned} (x, y) + (x', y') &:= (x + x', y + y') \\ (x, y) \cdot (x', y') &:= (x x' - y y', x y' + y x') \\ -(x, y) &:= (-x, -y) \\ (x, y)^{-1} &:= \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \text{ (falls } (x, y) \neq (0, 0) \text{)} \end{aligned}$$

Weiter definiere die Konstanten $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$, und die **imaginäre Einheit** $i := (0, 1)$.

Satz 34. $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, {}^{-1}, 0, 1)$ ist ein Körper.

Beweis. Hier sind die Körperaxiome K1-K10 zu überprüfen. Wir beschränken uns auf ein paar Fälle. Die additiven Axiome K1-K4 gelten, weil die sie „komponentenweise in den reellen Koordinaten x und y gelten. Die multiplikativen Axiome sind weniger anschaulich.

Für die Assoziativität K5 multiplizieren wir aus:

$$\begin{aligned} ((x, y) \cdot (x', y')) \cdot (x'', y'') &= (x x' - y y', x y' + y x') \cdot (x'', y'') = \\ &= (x x' x'' - y y' x'' - x y' y'' - y x' y'', x x' y'' - y y' y'' + x y' x'' + y x' x'') \text{ und} \\ (x, y) \cdot ((x', y') \cdot (x'', y'')) &= (x, y) \cdot (x' x'' - y' y'', x' y'' + y' x'') = \\ &= (x x' x'' - x y' y'' - y x' y'' - y y' x'', x x' y'' + x y' x'' + y x' x'' - y y' y''). \end{aligned}$$

$$\text{K6: } (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1, y \cdot 1) = (x, y).$$

K7: Sei $(x, y) \neq 0$. Dann ist $x^2 + y^2 > 0$. Weiter ist

$$(x, y) \cdot (x, y)^{-1} = (x, y) \cdot \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-x y + y x}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) = 1.$$

Die Kommutativität K8 folgt aus Symmetriegründen.

$$\begin{aligned} \text{K9: } (x, y) \cdot ((x', y') + (x'', y'')) &= (x, y) \cdot (x' + x'', y' + y'') = \\ &= (x x' + x x'' - y y' - y y'', x y' + x y'' + y x' + y x'') \text{ und} \\ (x, y) \cdot (x', y') + (x, y) \cdot (x'', y'') &= (x x' - y y', x y' + y x') + (x x'' - y y'', \\ & x y'' + y x'') = (x x' - y y' + x x'' - y y'', x y' + y x' + x y'' + y x''). \end{aligned}$$

Schließlich ist $0 = (0, 0) \neq (1, 0) = 1$. □

Wir „identifizieren“ die reelle Zahl x mit der komplexen Zahl $(x, 0)$. Dann gilt

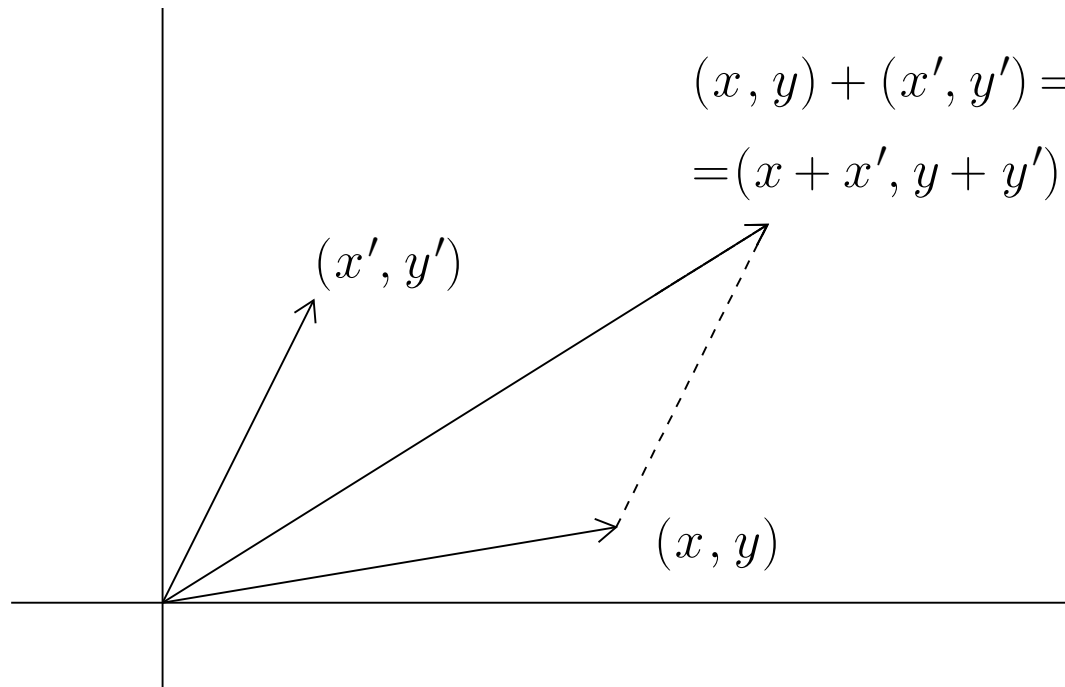
Satz 35. $i \cdot i = -1$ und $(x, y) = x + i y$.

Beweis. $i i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + i y. \quad \square$$

Man schreibt üblicherweise $x + i y$ für $(x, y) \in \mathbb{C}$.

Geometrische Interpretation von $+$



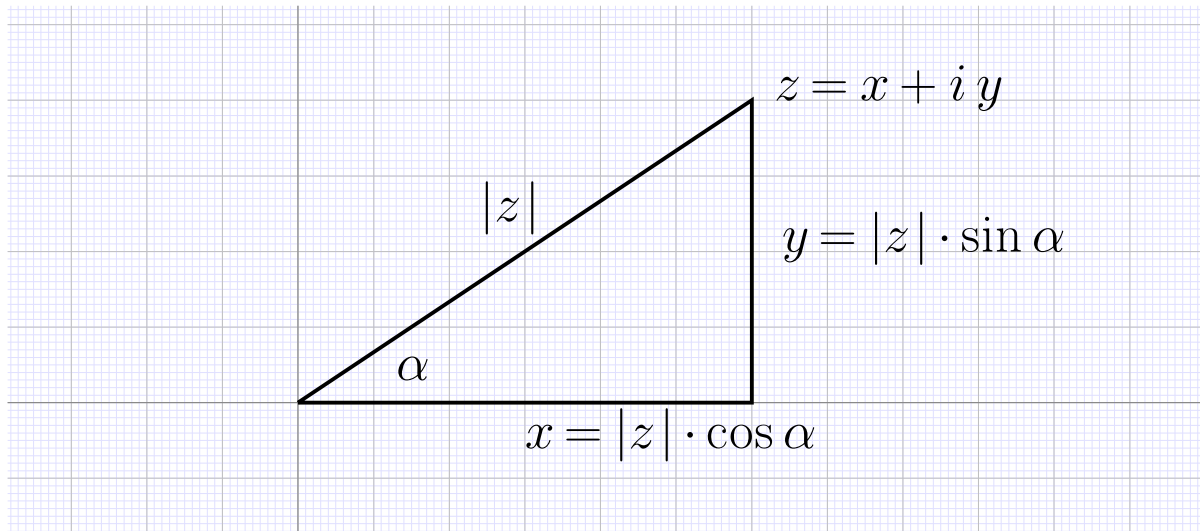
Die Summe $(x, y) + (x', y')$ entspricht der **vektoriellen Addition** der „Vektoren“ (x, y) und (x', y') .

Der Absolutbetrag auf \mathbb{C}

Definition 36. Für $z = x + i y \in \mathbb{C}$ definiere den (Absolut-)Betrag

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras ist $|z|$ der Abstand der Punkte $(0, 0)$ und (x, y) in der x - y -Ebene.



Geometrische Interpretation von \cdot

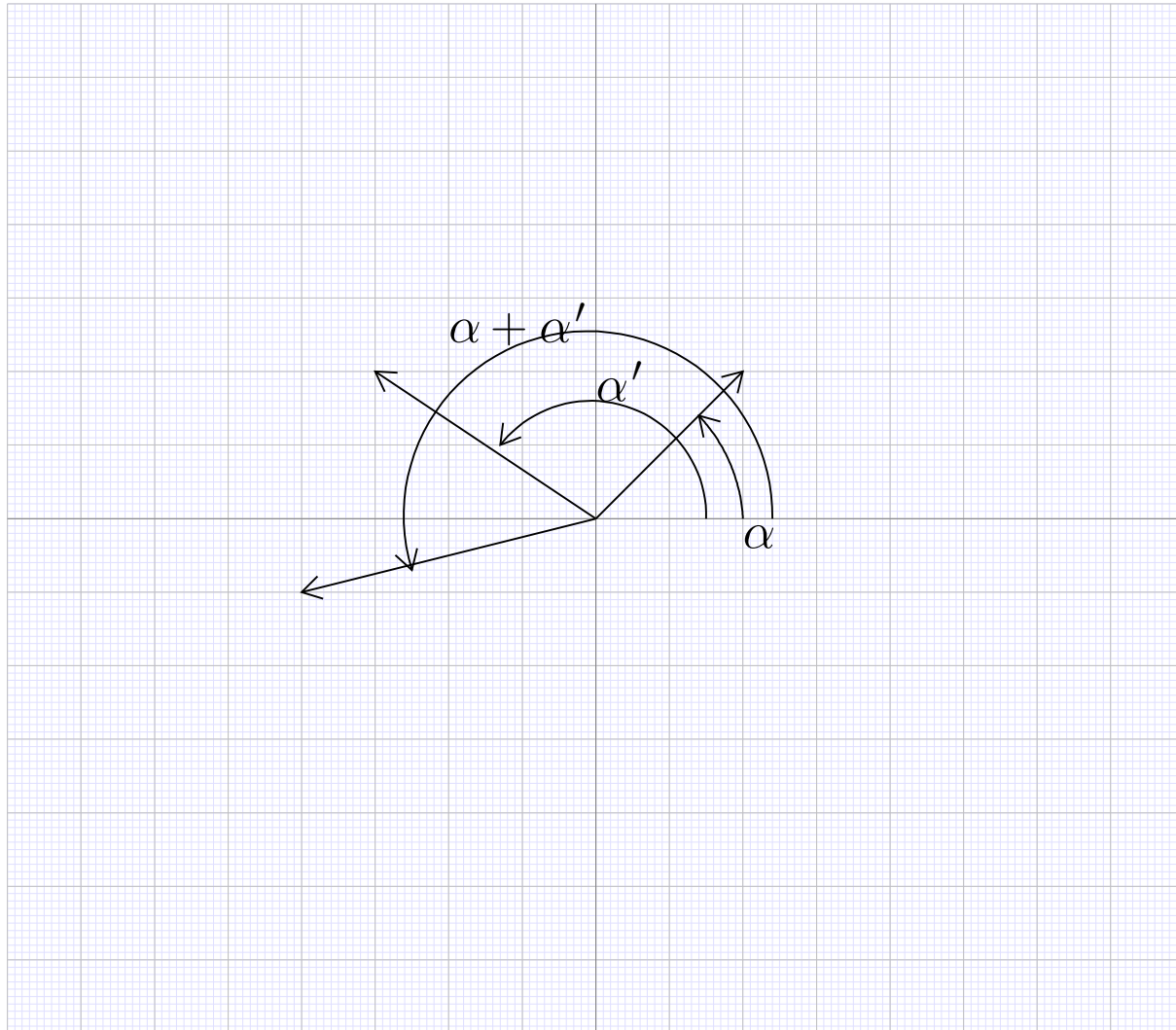
Aus der Abbildung folgt, dass wir z darstellen können als

$$z = (|z| \cdot \cos \alpha, |z| \cdot \sin \alpha).$$

Dann ist mit $z' = (|z'| \cdot \cos \alpha', |z'| \cdot \sin \alpha')$

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= (|z| \cdot \cos \alpha, |z| \cdot \sin \alpha) \cdot (|z'| \cdot \cos \alpha', |z'| \cdot \sin \alpha') \\ &= (|z| \cdot |z'| \cdot \cos \alpha \cdot \cos \alpha' - |z| \cdot |z'| \cdot \sin \alpha \cdot \sin \alpha', |z| \cdot |z'| \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha' + \\ &\quad |z| \cdot |z'| \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha') \\ &= |z| \cdot |z'| \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \alpha' - \sin \alpha \cdot \sin \alpha', \cos \alpha \cdot \sin \alpha' + \sin \alpha \cdot \cos \alpha') \\ &= |z| \cdot |z'| \cdot (\cos(\alpha + \alpha'), \sin(\alpha + \alpha')). \end{aligned}$$

Die letzte Zeile ergibt sich aus den *Additionstheoremen* für die Funktionen $\sin \alpha$ und $\cos \alpha$. Das Produkt $z \cdot z'$ hat demnach die Länge $|z| \cdot |z'|$, und es schließt mit der x -Achse den Winkel $\alpha + \alpha'$ ein.



Der Betrag komplexer Zahlen erfüllt dieselben Gesetze wie der Betrag reeller Zahlen. Die Beweise ergeben sich aus der geometrischen Interpretation von $|\cdot|$, $+$ und \cdot .

Satz 37. *a) Dreiecksungleichung:* $|x + y| \leq |x| + |y|$

b) $|x| \geq 0$

c) $|x| = 0 \leftrightarrow x = 0$

d) $-|x| \leq x \leq |x|$

e) $|-x| = |x|$

f) $|xy| = |x||y|$

g) $|x^n| = |x|^n$

h) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Komplexe Multiplikation mit $z = x + i y = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$ bedeutet eine *Streckung* um den Faktor $|z|$ und eine *Drehung* um den Winkel α .

Multiplikation mit i ist eine Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ ($\hat{=}$ 90°).

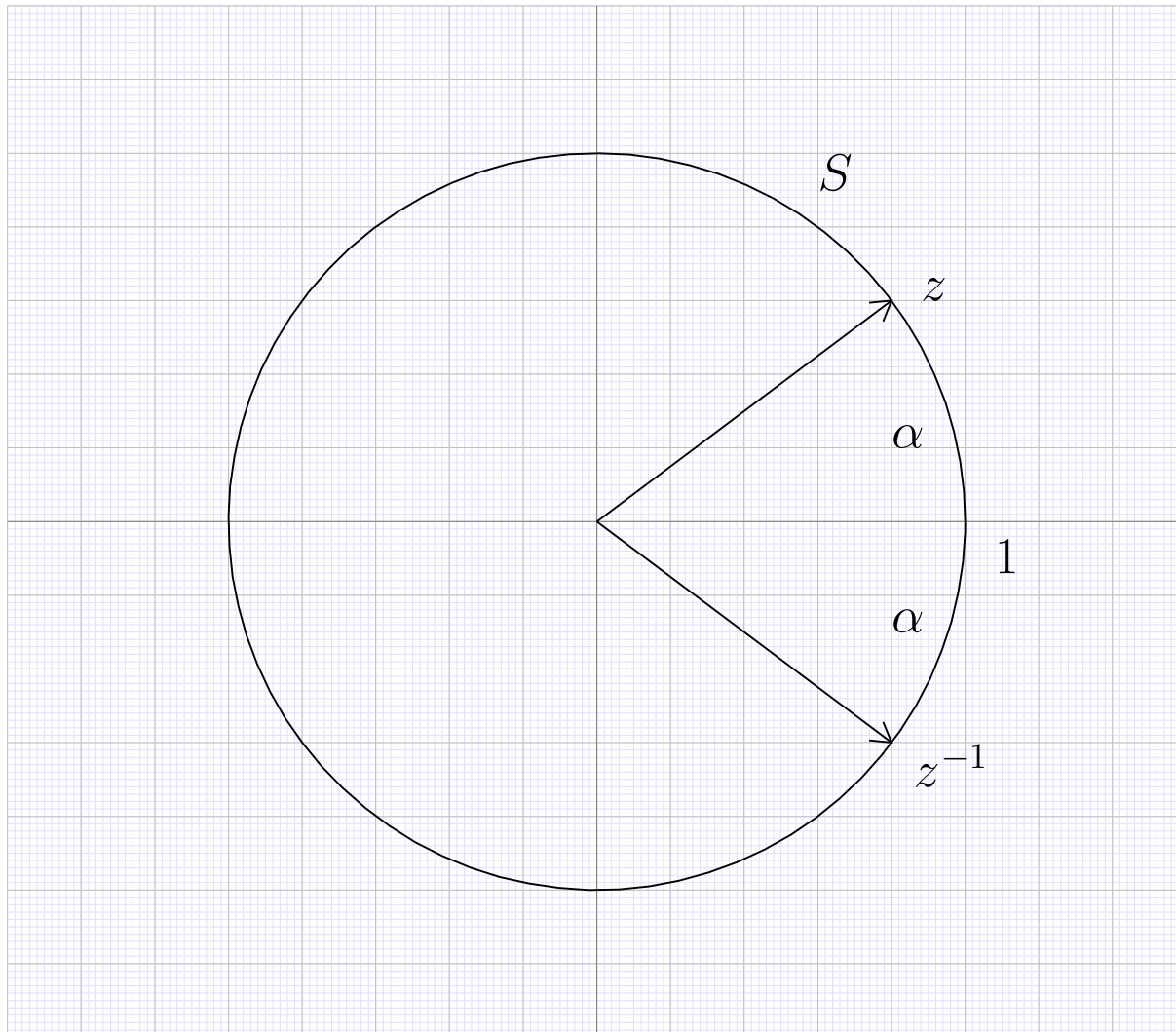
Multiplikation mit -1 ist eine Drehung um den Winkel π ($\hat{=}$ 180°).

Daher ist $i \cdot i = -1$.

Satz 38. *Der komplexe Einheitskreis*

$$S = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

bildet zusammen mit der Multiplikation, der Operation $^{-1}$ und der 1 eine kommutative Gruppe. Dies ist die Gruppe der Drehungen der Ebene.



Satz 39. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und jedes $z \in \mathbb{C}$ gibt es ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a^n = z$.

Beweis. Sei $z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)$. Für $a = \sqrt[n]{|z|} (\cos \frac{\alpha}{n} + i \sin \frac{\alpha}{n})$ ist $a^n = z$. \square

Satz 40. Jedes quadratische Polynom

$$p(z) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0$$

mit Koeffizienten $c_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c_1, c_0 \in \mathbb{C}$ in der Variablen z besitzt Nullstellen $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$, so dass $p(a_1) = 0$ und $p(a_2) = 0$ und mit denen das Polynom in Linearfaktoren zerfällt:

$$p(z) = c_2 (z - a_1) (z - a_2)$$

Dabei kann $a_1 = a_2$ sein.

Beweis. Wir arbeiten mit der bekannten *quadratischen Ergänzung*:

$$\begin{aligned}c_2 a^2 + c_1 a + c_0 = 0 &\iff a^2 + \frac{c_1}{c_2} a + \frac{c_0}{c_2} = 0 \\&\iff a^2 + \frac{c_1}{c_2} a + \frac{c_1^2}{4 c_2^2} - \frac{c_1^2}{4 c_2^2} + \frac{c_0}{c_2} = 0 \\&\iff \left(a + \frac{c_1}{2 c_2}\right)^2 = \frac{c_1^2}{4 c_2^2} - \frac{c_0}{c_2} \\&\iff a_{1,2} + \frac{c_1}{2 c_2} = \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4 c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \\&\iff a_{1,2} = -\frac{c_1}{2 c_2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4 c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}}\end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} & c_2 \left(z - \left(-\frac{c_1}{2c_2} + \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \right) \right) \left(z - \left(-\frac{c_1}{2c_2} - \sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \right) \right) \\ &= c_2 \left(\left(z + \frac{c_1}{2c_2} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_0}{c_2}} \right)^2 \right) \\ &= c_2 \left(z^2 + z \frac{c_1}{c_2} + \frac{c_1^2}{4c_2^2} - \frac{c_1^2}{4c_2^2} + \frac{c_0}{c_2} \right) = c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = p(z). \end{aligned}$$

□

Die komplexen Zahlen sind bezüglich Nullstellen von Polynomen beliebigen Grades abgeschlossen.

Satz 41. (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei*

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

*ein Polynom in der Variablen z vom **Grad** $n \geq 1$ mit Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0 \in \mathbb{C}$. Dann besitzt $p(z)$ Nullstellen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$,*

$$p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n) = 0,$$

mit denen $p(z)$ in Linearfaktoren zerfällt:

$$p(z) = c_n (z - a_1) (z - a_2) \cdots (z - a_n).$$

Der Fundamentalsatz ist ein schwieriger Satz der Algebra. Die Nullstellen lassen sich im Allgemeinen anders als beim Grad 2 nicht durch Wurzelausdrücke angeben.

Wir zählen nochmals die bisher betrachteten Zahlbereiche auf:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$

Hierauf stehen die Operationen

$$+, \cdot, -, ^{-1}, x - y, \frac{x}{y}, |x|$$

zur Verfügung. Sie erweitern sich von einem Zahlbereich zu einem größeren, und einige sind auf kleinen Zahlbereichen nur teilweise definiert.

Die Relation $<$ steht auf \mathbb{R} und seinen Teilbereichen zur Verfügung.

Grenzwerte von Folgen

Das Integral

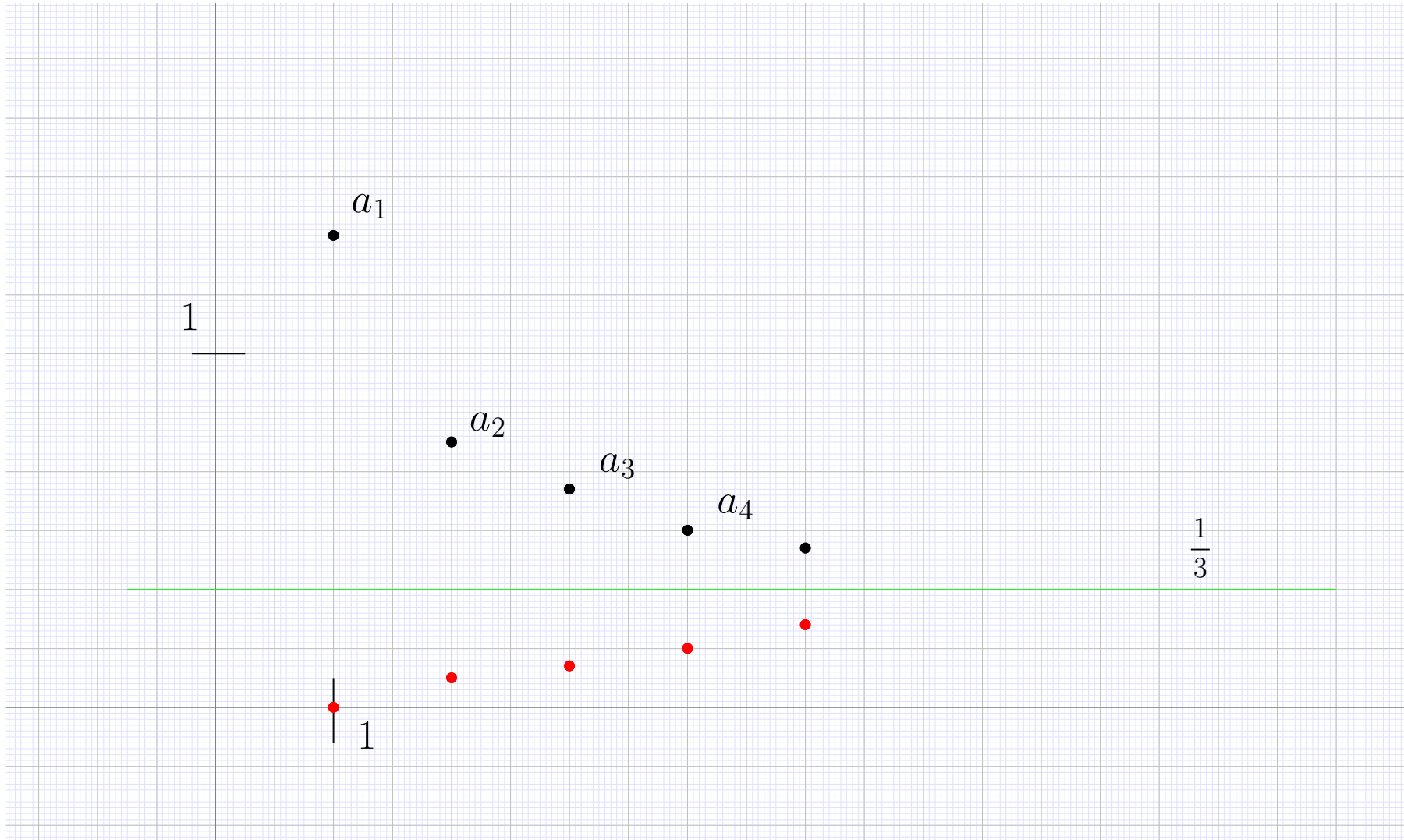
$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

kann berechnet werden, indem man in der Abschätzung

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \int_0^1 x^2 dx \leq \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$$

zeigt, dass linke und rechte Seite „gegen $\frac{1}{3}$ gehen, wenn n gegen unendlich geht“. Daher wollen wir *Grenzwerte* von Termen wie $\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$ bestimmen, wenn „ n gegen unendlich geht“, also Grenzwerte von *Folgen* wie

$$\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{1}\right)^2, \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2, \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2, \dots, \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2, \dots$$



Definition 42. *Eine Folge ist eine unendliche Sequenz*

$$(a_n)_n = (a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$$

von reellen oder komplexen Zahlen, wobei $m \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl ist. In der Regel ist dieser kleinste Index 0 oder 1.

Das Verhalten von Folgen „im Unendlichen“ wird mit Hilfe von Relationen wie $m \geq m_0$ oder $|x| < \varepsilon$ erfasst, wobei man sich m_0 als „große“ Zahl oder ε als „kleine“ Zahl vorstellt.

Definition 43. Sei $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$ eine Folge. Eine Zahl $b \in \mathbb{C}$ ist **Grenzwert** dieser Folge, falls es für alle reellen Zahlen $\varepsilon > 0$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$|b - a_n| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

*Eine Folge ist **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert besitzt.*

Satz 44. *Eine Folge $(a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \dots)$ besitzt höchstens einen Grenzwert.*

Beweis. Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ mit $b \neq c$. Sei $\varepsilon = \frac{|c-b|}{2}$. Weil $b \neq c$ ist $\varepsilon > 0$. Nach der Definition von „Grenzwert“ wähle natürliche Zahlen n_0 und n_1 so dass

$$\text{für alle } n \geq n_0: |b - a_n| < \varepsilon, \text{ und für alle } n \geq n_1: |c - a_n| < \varepsilon.$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0, n_1$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$|c - b| \leq |(c - a_n) + (a_n - b)| \leq |c - a_n| + |b - a_n| < 2\varepsilon = |c - b|.$$

Widerspruch. □

Eine Folge besitzt also entweder *keinen* Grenzwert, oder einen *eindeutig bestimmten* Grenzwert. $\lim_{n \rightarrow \infty}$ verhält sich wie eine teilweise definierte, *partielle* Funktion, die auf Folgen angewendet wird.

Beispiele

Satz 45. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Nach Satz 28 wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ist dann

$$\left| 0 - \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon. \quad \square$$

Satz 46. $\lim_{n \rightarrow \infty} n$ existiert nicht.

Beweis. Angenommen $\lim_{n \rightarrow \infty} n = b$. Für $\varepsilon = 1$ wähle ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$: $|b - n| < 1$. Nach dem Archimedischen Axiom wähle ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq n_0$ und $n \geq b + 1$. Dann ist $|b - n| = n - b \geq 1$, obwohl wegen $n \geq n_0$: $|b - n| < 1$. Widerspruch. \square

Satz 47. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\right) = \frac{1}{3}.$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{1}{n_0} < \frac{3}{2} \cdot \varepsilon$. Dann ist für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right| &= \frac{1}{3} \left(1 - 1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(2 - \frac{1}{n}\right) \\ &< \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Die Wahl von geeigneten n_0 und Ähnlichem in Abhängigkeit von einem „kleinen“ $\varepsilon > 0$ wird manchmal als „Epsilontik“ bezeichnet.

Die Limesoperation kann oft mit den arithmetischen Operationen vertauscht werden, so dass Limese bestimmt werden können, indem man Limese von einfacheren Teiltermen bestimmt und kombiniert.

Satz 48. Seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ konvergente Folgen mit Limites a und b . Dann

a) Die Folge $(a_n + b_n)_n$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

b) Die Folge $(a_n \cdot b_n)_n$ ist konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

c) Die konstante Folge $(c)_n$ ist konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$.

d) Angenommen $b \neq 0$. Dann gibt es ein $m_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n \geq m_0 \rightarrow b_n \neq 0$.
Weiterhin ist die Folge $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq m_0}$ konvergent und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) / \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \right)$$

Beweis. a) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |(a + b) - (a_n + b_n)| &= |(a - a_n) + (b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| + |b - b_n| \text{ (Dreiecksungleichung)} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}, \quad |a - a_n| < 1 \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1}$$

Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} |a \cdot b - a_n \cdot b_n| &= |a \cdot b - a_n \cdot b + a_n \cdot b - a_n \cdot b_n| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |b - b_n| \cdot |a_n| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |b - b_n| \cdot (|a| + 1) \\ &< \frac{\varepsilon}{|a| + |b| + 1} \cdot (|a| + |b| + 1) = \varepsilon \end{aligned}$$

c) ist einfach („trivial“).

d) Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \geq m_0$, so dass für alle $n \geq n_0$:

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{\left|\frac{2 \cdot a}{b \cdot b}\right| + \frac{2}{|b|}}, |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{\left|\frac{2 \cdot a}{b \cdot b}\right| + \frac{2}{|b|}} \quad \text{und} \quad |b_n| \geq \frac{|b|}{2}$$

Dann ist für $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{b} - \frac{a_n}{b_n} \right| &= \left| \frac{a \cdot b_n - b \cdot a_n}{b \cdot b_n} \right| \\ &= \left| \frac{a \cdot b_n - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot a_n}{b \cdot b_n} \right| \\ &\leq |b - b_n| \cdot \left| \frac{a}{b \cdot b_n} \right| + |a - a_n| \cdot \frac{1}{|b_n|} \\ &\leq |b - b_n| \cdot \left| \frac{2 \cdot a}{b \cdot b} \right| + |a - a_n| \cdot \frac{2}{|b|} \\ &< \frac{\varepsilon}{\left|\frac{2 \cdot a}{b \cdot b}\right| + \frac{2}{|b|}} \cdot \left(\left|\frac{2 \cdot a}{b \cdot b}\right| + \frac{2}{|b|} \right) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Beispiel

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \right) &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^2 \\ &= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \cdot \left(1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot (1 - 0) \cdot (1 - 0) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Cauchy-Folgen

Wir hatten angedeutet, dass die reellen Zahlen bessere Abschlusseigenschaften als die rationalen Zahlen haben. Insbesondere existiert $\sqrt{2}$ in \mathbb{R} . Wir wollen jetzt mit Hilfe konvergenter Folgen eine starke Abschlusseigenschaft formulieren, aus der die Abgeschlossenheit von \mathbb{R} bezüglich vieler Prozesse folgt.

Definition 49. *Eine Folge $(a_n)_n$ ist eine **Cauchy-Folge**, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Satz 50. *Wenn $(a_n)_n$ eine konvergente Folge ist, so ist $(a_n)_n$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei a Grenzwert von $(a_n)_n$. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt für alle $m, n \geq n_0$:

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a - a_n| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

In den reellen Zahlen gilt die Umkehrung dieses Satzes:

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert.

Mit Hilfe dieses Axioms kann man die Struktur der reellen Zahlen (bis auf Isomorphie) exakt festlegen.

Definition 51. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen.

- a) (a_n) ist **strikt monoton wachsend**, wenn $m < n \rightarrow a_m < a_n$
- b) (a_n) ist **monoton wachsend**, wenn $m < n \rightarrow a_m \leq a_n$
- c) (a_n) ist **nach oben beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle n gilt: $a_n < b$
- d) (a_n) ist **strikt monoton fallend**, wenn $m < n \rightarrow a_m > a_n$
- e) (a_n) ist **monoton fallend**, wenn $m < n \rightarrow a_m \geq a_n$
- f) (a_n) ist **nach unten beschränkt**, wenn es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle n gilt: $a_n > b$

Satz 52. *Eine monoton wachsende nach oben beschränkte Folge $(a_m) = (a_0, a_1, \dots)$ reeller Zahlen ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Sei (a_m) durch die Zahl b nach oben beschränkt, d.h. $a_m < b$. Wir müssen zeigen, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

Angenommen, dies wäre falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ Zahlen $m, n \geq n_0$ existieren mit $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$. Nach dem Archimedischen Axiom gibt es eine natürliche Zahl k , so dass $k \cdot \varepsilon > b - a_0$. Wähle nun $m_1 < n_1$ so dass $a_{n_1} - a_{m_1} \geq \varepsilon$. Wähle dann $m_2 < n_2$ so dass $n_1 < m_2$ und $a_{n_2} - a_{m_2} \geq \varepsilon$. Usw. bis zu $m_k < n_k$ mit $n_{k-1} < m_k$ und $a_{n_k} - a_{m_k} \geq \varepsilon$.

Aber dann ist

$$b - a_0 > (a_{n_k} - a_{m_k}) + (a_{n_{k-1}} - a_{m_{k-1}}) + \dots + (a_{n_1} - a_{m_1}) \geq k \cdot \varepsilon > b - a_0$$

Widerspruch. □

Unendliche Reihen

Definition 53. Sei $(a_n)_{m \leq n}$ eine reelle oder komplexe Folge. Dann definiere

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^n a_i$$

Der Ausdruck

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots$$

ist eine (unendliche) Reihe. Der Wert $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ dieser Reihe ist der Grenzwert der Folge der Partialsummen

$$\sum_{i=m}^n a_i$$

Wenn dieser Grenzwert existiert, so **konvergiert** die Reihe. Andernfalls **divergiert** die Reihe.

Satz 54. Wenn $\sum_{i=0}^n a_i$ konvergiert, so ist (a_i) eine **Nullfolge**, d.h. $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{i=0}^n a_i$ konvergiert, ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_0$

$$\left| \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - \left(\sum_{i=0}^m a_i \right) \right| < \varepsilon.$$

Dann ist für alle $n \geq n_0 + 1$

$$|a_n| = \left| \left(\sum_{i=0}^n a_i \right) - \left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \right) \right| < \varepsilon$$

□

Satz 55. (Die geometrische Reihe)

a) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

b) Sei $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| \geq 1$. Dann divergiert $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Beweis. a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^m q^n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{q^{m+1} - 1}{q - 1} = \frac{(\lim_{m \rightarrow \infty} q^{m+1}) - 1}{q - 1} = \frac{0 - 1}{q - 1}.$$

b) Für $|q| \geq 1$ ist $|q^n| = |q|^n \geq 1$. Daher ist (q^n) keine Nullfolge. □

Wir notieren Rechengesetze für den „Operator“ $\sum_{i=n}^{\infty}$:

Satz 56. Sei $m \leq n$. Dann konvergiert $\sum_{i=m}^{\infty} a_i$ gdw. („genau dann, wenn“) $\sum_{i=n}^{\infty} a_i$ konvergiert. In diesem Fall ist

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{\infty} a_i &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=m}^k a_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^k a_i \right) = \sum_{i=m}^n a_i + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^k a_i = \\ & \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \end{aligned}$$

□

Satz 57. Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen. Dann ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Beweis.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m (a_n + b_n) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=0}^m a_n + \sum_{n=0}^m b_n \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n +$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m b_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \lambda a_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lambda \sum_{n=0}^m a_n \right) = \lambda \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad \square$$

Bemerkung. Dieser Satz kann folgendermaßen interpretiert werden:
Die Menge der Folgen

$$\{(a_n) \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert}\}$$

bildet zusammen mit den Operationen

$$(a_n) \oplus (b_n) := (a_n + b_n) \text{ und } \lambda \odot (a_n) := (\lambda a_n)$$

einen \mathbb{C} -Vektorraum.

Die Operation

$$(a_n) \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

ist eine lineare Abbildung dieses Vektorraums in den Skalkörper \mathbb{C} .

Das Quotientenkriterium

Satz 58. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe. Sei θ eine reelle Zahl mit $0 \leq \theta < 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für $n \geq n_0$

$$|a_{n+1}| \leq \theta |a_n|.$$

Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Die Tatsache, dass es ein n_0 gibt, so dass für $n \geq n_0$ eine Eigenschaft gilt, wird oft formuliert als: „**für fast alle** n gilt die Eigenschaft“.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$$

bedeutet dann: für alle $\varepsilon > 0$ gilt, dass *für fast alle* n : $|b - a_n| < \varepsilon$.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge bildet. Sei $\varepsilon > 0$. Da (θ^l) eine Nullfolge ist, existiert ein $n_1 \geq n_0$, so dass für alle $l \geq n_1$

$$|a_{n_0}| \frac{\theta^{l+1-n_0}}{1-\theta} < \varepsilon.$$

Man zeigt leicht mit vollständiger Induktion, dass für $n \geq n_0$: $|a_n| \leq \theta^{n-n_0} |a_{n_0}|$. Dann ist für $k \geq l \geq n_1$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^k a_n - \sum_{n=0}^l a_n \right| &= \left| \sum_{n=l+1}^k a_n \right| \\ &\leq \sum_{n=l+1}^k |a_n| = |a_{l+1}| + |a_{l+2}| + \dots + |a_k| \\ &\leq \theta^{l+1-n_0} |a_{n_0}| + \theta^{l+2-n_0} |a_{n_0}| + \dots + \theta^{k-n_0} |a_{n_0}| \\ &= |a_{n_0}| \theta^{l+1-n_0} (1 + \theta + \theta^2 + \dots + \theta^{k-l-1}) \\ &= |a_{n_0}| \theta^{l+1-n_0} \frac{1 - \theta^{k-l}}{1 - \theta} < |a_{n_0}| \theta^{l+1-n_0} \frac{1}{1 - \theta} < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 59. *Die Exponentialreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

konvergiert für alle $x \in \mathbb{C}$. Definiere die Exponentialfunktion als

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Beweis. Sie $x \in \mathbb{C}$. Wir weisen das Quotientenkriterium mit $\theta = \frac{1}{2}$ nach. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\left| \frac{x}{n_0+1} \right| < \frac{1}{2}$. Dann ist für $n \geq n_0$

$$\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \cdot \frac{x^n}{n!} \right| = \left| \frac{x}{n+1} \right| \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{x^n}{n!} \right|.$$

□

Die Exponentialfunktion ist durch eine **Potenzreihe** definiert, d.h. durch eine Reihe der Form

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Funktionen wie $\sin(x)$ und $\cos(x)$ lassen sich ebenfalls als Potenzreihen darstellen.

Die Exponentialfunktion ist die wichtigste Potenzreihe innerhalb der Analysis. Sie besitzt viele nützliche Eigenschaften.

$$\text{Es gilt } \exp(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = \frac{0^0}{0!} = \frac{1}{1} = 1.$$

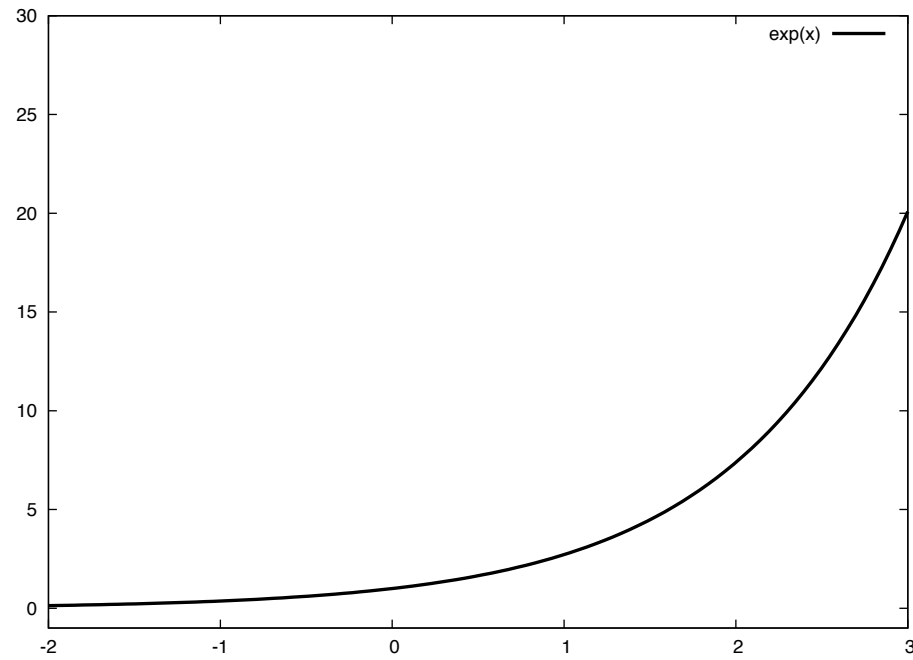
Der Wert $\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!}$ ist die fundamentale **Eulersche Zahl** e . Numerisch gilt z.B.

$$2,707 < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} < e < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4!} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{4!} + \dots <$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{4}{3} < 2,723$$

Genauer gilt $e = 2,718281828\dots$

```
GNUpot] set xrange [-2:3]; set yrange [-1:30]; plot exp(x) with  
lines lw 5
```



```
GNUpot]
```

Satz 60. Für alle $x, y \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Mit dem „Restglied“ $R_k = \sum_{m,n \leq k, m+n > k} \frac{x^m y^n}{m! n!}$ und unter Benutzung der binomischen Formeln ist

$$\begin{aligned} \left(\sum_{m=0}^k \frac{x^m}{m!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} \right) &= \sum_{m=0, n=0}^k \frac{x^m y^n}{m! n!} = \sum_{m+n \leq k} \frac{x^m y^n}{m! n!} + \sum_{m, n \leq k, m+n > k} \frac{x^m y^n}{m! n!} \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{m=0}^l \frac{x^m y^{l-m}}{m! (l-m)!} + R_k \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \sum_{m=0}^l \frac{l!}{m! (l-m)!} x^m y^{l-m} + R_k \\ &= \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} (x + y)^l + R_k = \sum_{l=0}^k \frac{(x + y)^l}{l!} + R_k \end{aligned}$$

Die Folge (R_k) der Restglieder ist eine Nullfolge. Wir nehmen an, dass k eine gerade Zahl ist:

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{m,n \leq k, m+n > k} \frac{x^m y^n}{m! n!} \right| &\leq \sum_{m,n \leq k, m+n > k} \left| \frac{x^m y^n}{m! n!} \right| \\
 &\leq \sum_{m,n \leq k, m+n > k} \left| \frac{(1 + |x|)^k (1 + |y|)^k}{\left(\frac{k}{2}\right)!} \right| \\
 &\leq k^2 \cdot \left| \frac{(1 + x)^k (1 + y)^k}{\left(\frac{k}{2}\right)!} \right|.
 \end{aligned}$$

Mit Abschätzungen des Wachstums von $\left(\frac{k}{2}\right)!$ im Verhältnis zu der Potenz $(1 + x)^k$ mit fester Grundzahl $(1 + x)$ erhält man, dass die rechte Seite gegen 0 konvergiert.

Nach dem Satz über die Verträglichkeit von arithmetischen Operationen mit der Limesbildung gilt

$$\begin{aligned}\exp(x) \cdot \exp(y) &= \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^k \frac{x^m}{m!} \right) \cdot \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{m=0}^k \frac{x^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^k \frac{y^n}{n!} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{l=0}^k \frac{(x+y)^l}{l!} + R_k \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^k \frac{(x+y)^l}{l!} + \lim_{k \rightarrow \infty} R_k \\ &= \exp(x+y) + 0 = \exp(x+y)\end{aligned}$$

□

Satz 61. Für alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\exp(n) = e^n.$$

Deshalb schreiben wir auch e^x statt $\exp(x)$.

Beweis. Für $n \geq 0$ benutzen wir das Prinzip der vollständigen Induktion.

Induktionsverankerung: $\exp(0) = 1 = e^0$.

Induktionsschluss: Sei $\exp(n) = e^n$. Dann ist

$$\exp(n+1) = \exp(n) \cdot \exp(1) = e^n \cdot e = e^{n+1}.$$

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für negative $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ gilt $\exp(n) \cdot \exp(-n) = \exp(n-n) = \exp(0) = 1$ und

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n.$$

□

Weitere Konvergenzkriterien

In den Beweisen zur Funktion e^x wurden Techniken benutzt, die wir noch einmal allgemein betrachten wollen.

Definition 62. Eine Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut, wenn $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 63.

a) Die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ divergiert.

b) Die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert.

c) Die alternierende harmonische Reihe ist nicht absolut konvergent.

Beweis. *a)* Die Partialsummen der harmonische Reihe werden beliebig groß, denn

$$\begin{aligned} & [1] + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \dots > \\ & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

c) folgt sofort aus *a)*.

b) Wir zeigen, dass die Partialsummen der alternierenden harmonischen Reihe eine Cauchy-Folge bilden. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein n_0 , so dass $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Seien $n \geq m \geq n_0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} - \sum_{i=1}^m \frac{(-1)^{i+1}}{i} \right| \\
 &= \left| \sum_{i=m+1}^n \frac{(-1)^{i+1}}{i} \right| \\
 &= \left| \sum_{i=m+1}^n \frac{(-1)^{i-m-1}}{i} \right| \\
 &= \frac{1}{m+1} - \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) - \left(\frac{1}{m+2} - \frac{1}{m+3} \right) - \dots \\
 &< \frac{1}{m+1} < \varepsilon.
 \end{aligned}$$

□

Satz 64. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ konvergiert absolut für alle $x \in \mathbb{C}$.

Beweis. Die Reihe der Absolutbeträge konvergiert, denn

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{|x|^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} = \exp(|x|).$$

□

Satz 65. *Eine Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$, die absolut konvergiert, konvergiert auch.*

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge der Partialsummen von $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ eine Cauchy-Folge bilden. Sei $\varepsilon > 0$. Da die Partialsummen von $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n|$ eine Cauchy-Folge bilden, existiert ein n_0 , so dass für $l \geq k \geq n_0$

$$\sum_{n=k+1}^l |a_n| < \varepsilon.$$

Dann ist aber auch nach der Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{n=k+1}^l a_n \right| \leq \sum_{n=k+1}^l |a_n| < \varepsilon.$$

□

Satz 66. (Majorantenkriterium) *Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ von reellen Zahlen $a_n \geq 0$ heißt **Majorante** einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|b_n| \leq a_n$. Wenn die Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ (absolut) konvergiert, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ebenfalls absolut.*

Beweis. Die Folge der Partialsummen $\sum_{n=0}^k |b_n|$ ist eine monoton wachsende Folge. Da $\sum_{n=0}^k |b_n| \leq \sum_{n=0}^k a_n$, ist die Folge weiterhin durch den Grenzwert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach oben beschränkt. Nach Satz 52 ist die Folge der Partialsummen eine Cauchy-Folge und daher konvergent. \square

Satz 67. (Produktsatz) Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergierende Reihen. Definiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ durch

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k \cdot b_{n-k} = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \dots + a_n \cdot b_0.$$

Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

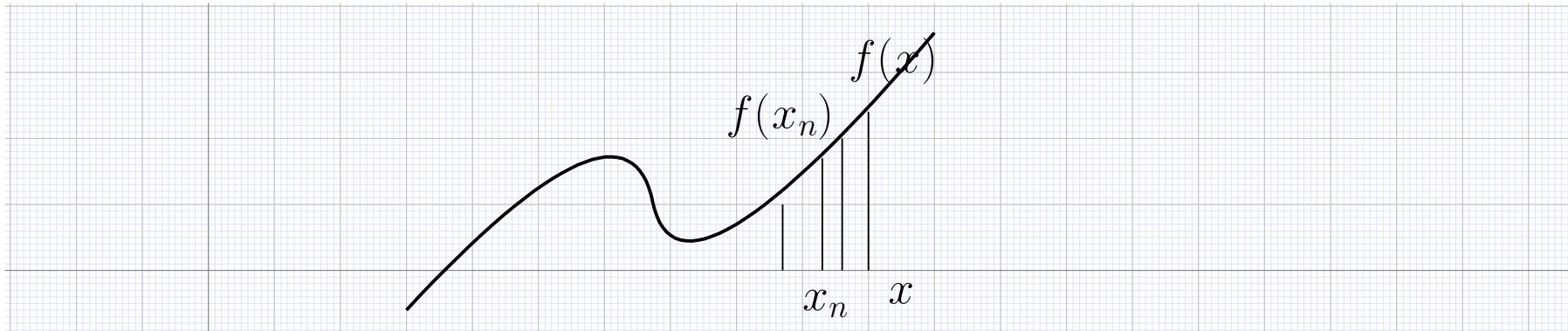
Der Beweis kann ähnlich wie der von $\exp(x) \cdot \exp(y) = \exp(x+y)$ geführt werden.

Stetigkeit

Die meisten in der Analysis betrachteten Funktionen sind *stetig*. Eine stetige Funktion bewahrt Limes.

Definition 68. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $M \subseteq \mathbb{C}$. Die Funktion f heißt **stetig an der Stelle** $x \in M$, wenn für jede Folge (x_n) von Elementen von M gilt:

$$\text{falls } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ so ist } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x).$$



Satz 69. (ε - δ -Kriterium) *Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ wie oben ist genau dann stetig an der Stelle $x \in M$, wenn $f(x)$ der **Grenzwert** von $f(z)$ für z gegen x ist:*

$$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x).$$

Dabei ist $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = a$ definiert durch: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$(*) \quad z \in M, z \neq x \text{ und } |z - x| < \delta \text{ impliziert } |f(z) - f(x)| < \varepsilon.$$

Beweis. Angenommen

$$\lim_{x' \rightarrow x} f(x') = f(x).$$

Wir zeigen die Stetigkeit von f an der Stelle x .

Sei (x_n) eine Folge von Elementen von M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Es genügt zu zeigen, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$. Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Bedingung gibt es ein $\delta > 0$, so dass (*) gilt. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \delta.$$

Nach (*) folgt daraus weiter

$$n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x)| < \varepsilon.$$

Also ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x)$.

Andererseits sei die im Satz formulierte Eigenschaft falsch. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $\delta > 0$ ein $x'_\delta \in M$ existiert, für das (*) nicht gilt. D.h. $|x'_\delta - x| < \delta$ aber $|f(x'_\delta) - f(x)| \geq \varepsilon$. Definiere die Folge $(x_n)_{n \geq 1}$ durch

$$x_n = x'_{\frac{1}{n}}.$$

Wegen $|x_n - x| = |x'_{\frac{1}{n}} - x| < \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

Wegen $|f(x_n) - f(x)| = |f(x'_{\frac{1}{n}}) - f(x)| \geq \varepsilon$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(x)$.

Also ist f *nicht* stetig an der Stelle x . □

In dem Satz war die (logische) **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$ zweier Eigenschaften zu zeigen. Dies geschah, indem separat die **Implikationen** $B \Rightarrow A$ und $(\text{nicht } B) \Rightarrow (\text{nicht } A)$ gezeigt wurden.

Definition 70. *Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ heißt stetig, wenn sie an allen Stellen $x \in M$ stetig ist.*

Wir zeigen, dass die Klasse der stetigen Funktionen viele wichtige Funktionen enthält.

Gottfried W. Leibniz, Isaac Newton usw.: „*Natura non facit saltus*“ (lat.: Die Natur macht keine Sprünge): In der Natur entwickelt sich alles stetig, stufenweise.

Satz 71.

- a) Die **konstante Funktion** $\text{const}_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{const}_c(z) = c$ ist stetig.
- b) Die **identische Funktion** $\text{id}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\text{id}(z) = z$ ist stetig.
- c) Wenn die Funktionen $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M$ stetig sind, so sind auch die Summe $f + g: M \rightarrow \mathbb{C}$, $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ und das Produkt $f \cdot g: M \rightarrow \mathbb{C}$, $(f \cdot g)(z) = f(z) \cdot g(z)$ an der Stelle x stetig.
- d) Wenn die Funktionen $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M$ stetig sind und $g(x) \neq 0$ so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}: M \rightarrow \mathbb{C}$, $(\frac{f}{g})(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ an der Stelle x stetig.
- e) Sei die Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $x \in M_0 \subseteq M$ stetig. Dann ist auch die **Einschränkung** $f|_{M_0}: M_0 \rightarrow \mathbb{C}$, $(f|_{M_0})(z) = f(z)$ an der Stelle x stetig.
- f) Wenn $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $M_0 \subseteq M$ ist, so ist $f|_{M_0}$ stetig.

Beweis. Wir benutzen die ursprüngliche Charakterisierung von Stetigkeit mit Hilfe unendlicher Folgen.

a) Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{const}_c(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c = \text{const}_c(x).$$

Also ist const_c stetig an der Stelle x . Da $x \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist const_c stetig.

b) Sei $x \in \mathbb{C}$. Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dann ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{id}(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x = \text{id}(x).$$

Also ist id stetig an der Stelle x . Da $x \in \mathbb{C}$ beliebig war, ist id stetig.

c) Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Dann gilt wegen der „Homomorphismeigenschaften“ der Limesoperation (Satz 48)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f + g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) + g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x)$$

Also sind $f + g$ und $f \cdot g$ an der Stelle x stetig.

d) Sei (x_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Da g an der Stelle x stetig ist, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n) = g(x) \neq 0$. Daher ist *für fast alle n* : $g(x_n) \neq 0$. Durch Übergang zu einem Endstück der Folge kann man annehmen, dass für alle n : $g(x_n) \neq 0$. Dann gilt wiederum nach Satz 48

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f}{g}\right)(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)\right) / \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g(x_n)\right) = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x).$$

Also ist $\frac{f}{g}$ an der Stelle x stetig.

e) und f) sind trivial. □

Aus dem letzten Satz folgt sofort

Satz 72.

a) *Jedes Polynom*

$$p(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0$$

mit Koeffizienten $c_n, c_{n-1}, c_{n-2}, \dots, c_0 \in \mathbb{C}$ definiert eine stetige Funktion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

b) Je zwei Polynome $p(z)$ und $q(z)$ definieren eine **rationale Funktion** $\frac{p}{q}: \{z \in \mathbb{C} \mid q(z) \neq 0\} \rightarrow \mathbb{C}$. Diese ist stetig auf ihrem gesamten Definitionsbereich.

Satz 73. Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ absolut für alle z mit $|z| < |z_0|$. Weiterhin ist die Funktion $f: \{z \mid |z| < |z_0|\} \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Definition

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig.

Daraus folgt sofort

Satz 74. Die Exponentialfunktion $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ konvergiert, gibt es eine obere Schranke $M \in \mathbb{R}$ für die Glieder $a_n z_0^n$ der Folge:

$$|a_n z_0^n| < M.$$

Sei $R = |z_0|$. Betrachte $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$. Wähle r mit $|z| < r < R$. Dann gilt für y mit $|y| < r$

$$|a_n y^n| = |a_n z_0^n \frac{y^n}{z_0^n}| = |a_n z_0^n| \left| \frac{r^n}{R^n} \right| < M \left(\frac{r}{R} \right)^n.$$

Daher ist die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^n$ eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$. Die geometrische Reihe konvergiert (absolut) für $\frac{r}{R} < 1$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ absolut, insbesondere an der Stelle z .

Zum Nachweis der Stetigkeit an der Stelle z sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^n = M \left(\frac{r}{R} \right)^{n_0+1} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n = M \left(\frac{r}{R} \right)^{n_0+1} \frac{1}{1 - \frac{r}{R}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da das Polynom $\sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n$ stetig in z ist, wähle $\delta > 0$, so dass $|z| + \delta < r$, und so dass für y mit $|y - z| < \delta$ gilt

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann gilt für solche y

$$|y| = |y - z + z| \leq |y - z| + |z| < |z| + \delta < r$$

und

$$\left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n \right| \leq \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |a_n y^n| < \sum_{n=n_0+1}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Also gilt für alle y mit $|y - z| < \delta$

$$\begin{aligned} |f(y) - f(z)| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &\leq \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n y^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n y^n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Aus dem Satz über die Konvergenz von Potenzreihen ergibt sich auch

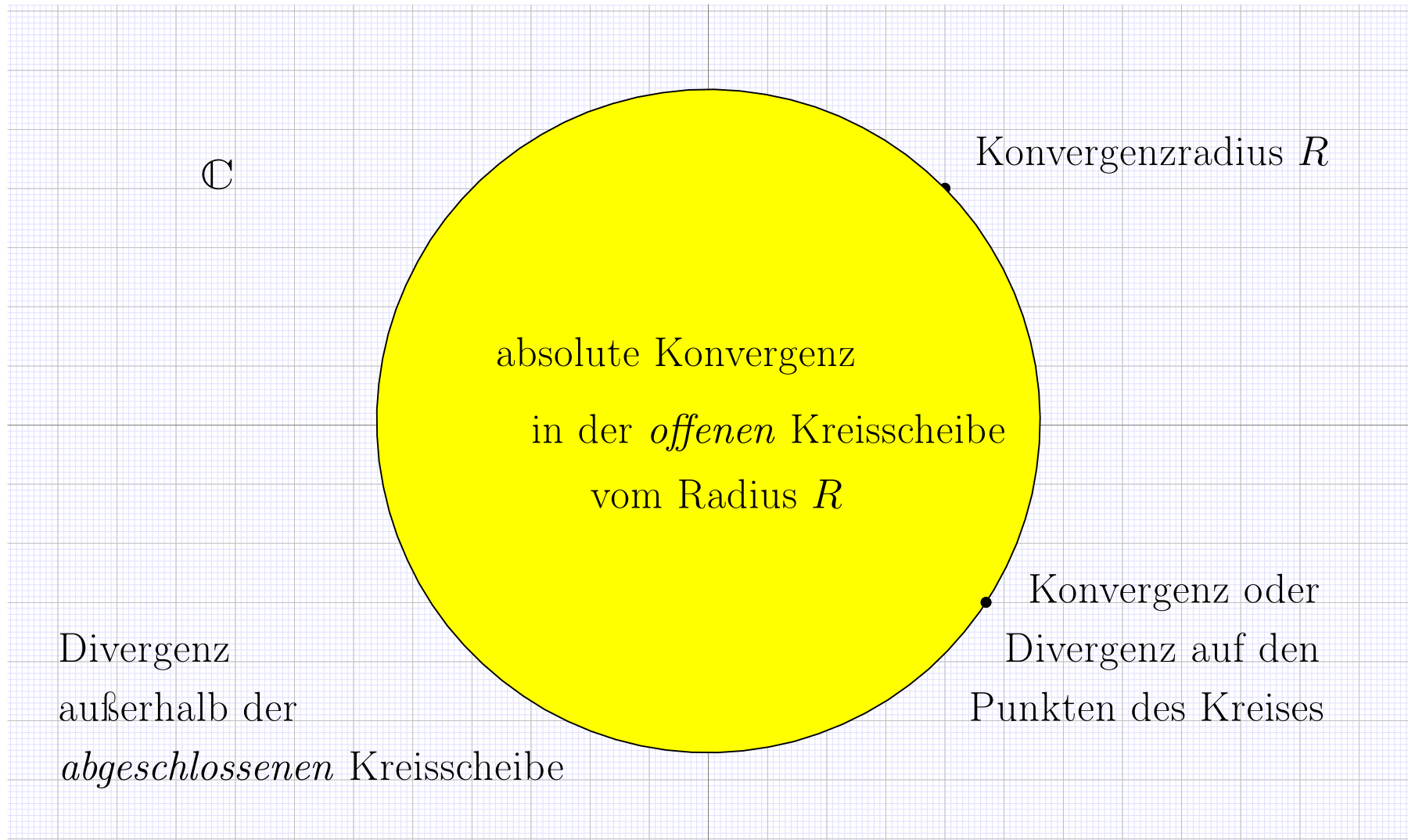
Satz 75. *Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ divergiert für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann divergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ für alle z mit $|z| > |z_0|$.*

Also ist die Menge

$$K = \{ |z| \mid z \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ konvergiert} \}$$

ein Anfangsstück der Menge der positiven Zahlen ist. Dabei sind folgende Fälle möglich:

- a) $K = \{0\}$: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiert nur für $z = 0$. Dann ist der **Konvergenzradius** der Reihe $= 0$.
- b) $K = [0, R) = \{x \mid 0 \leq x < R\}$. Dann ist der **Konvergenzradius** der Reihe $= R$.
- c) $K = [0, R] = \{x \mid 0 \leq x \leq R\}$. Dann ist der **Konvergenzradius** der Reihe $= R$.
- d) $K = [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$. Dann ist der **Konvergenzradius** der Reihe $= \infty$.



Satz 76. (Zwischenwertsatz für stetige Funktionen) *Zu reellen Zahlen $a < b$ sei*

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

das abgeschlossene Intervall von a nach b . Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, und sei y eine reelle Zahl mit $f(a) \leq y \leq f(b)$ im Fall $f(a) \leq f(b)$ oder mit $f(b) \leq y \leq f(a)$ im Fall $f(b) \leq f(a)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit

$$f(x) = y.$$

Beweis. Grundidee ist es, für die gesuchte Zahl x eine „Dezimalentwicklung“ $d_0, d_1d_2\dots$ mit $d_0 \in \mathbb{Z}$ und $d_1, d_2, \dots \in \{0, 1, \dots, 9\}$ zu definieren, so dass anschaulich

$$x = d_0, d_1d_2\dots = d_0 + d_1 \cdot 10^{-1} + d_2 \cdot 10^{-2} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} d_i \cdot 10^{-i}.$$

Wir können **oBdA.** („ohne Beschränkung der Allgemeinheit“) annehmen, dass $f(a) \leq f(b)$. Weiter können wir annehmen, dass $f(a) < y < f(b)$ ist, denn sonst könnte man einfach $x = a$ oder $x = b$ nehmen. Außerdem setzen wir die Funktion f außerhalb von $[a, b]$ *stetig* zu $\bar{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fort:

$$\bar{f}(z) = \begin{cases} f(a), & \text{falls } z < a \\ f(z), & \text{falls } z \in [a, b] \\ f(b), & \text{falls } z > b \end{cases}$$

Nach dem Archimedischen Axiom wähle ein *maximales* $d_0 \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft

$$\bar{f}(d_0) < y \text{ (und } \bar{f}(d_0 + 1) \geq y).$$

Definiere die Folge (d_n) rekursiv. Wenn d_0, \dots, d_n definiert sind mit

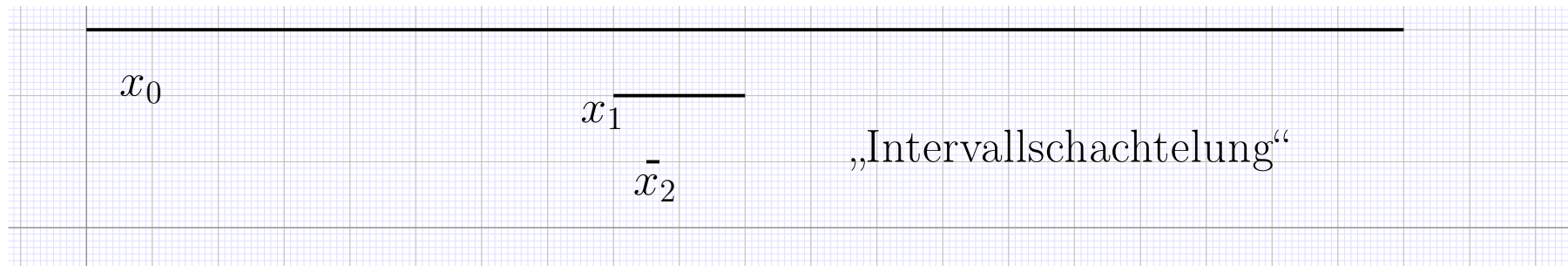
$$\bar{f}\left(\sum_{i=0}^n d_i \cdot 10^{-i}\right) < y \text{ (und } \bar{f}\left(\left(\sum_{i=0}^n d_i \cdot 10^{-i}\right) + 10^{-n}\right) \geq y),$$

so sei $d_{n+1} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ *maximal* mit den Eigenschaften

$$\bar{f}\left(\sum_{i=0}^{n+1} d_i \cdot 10^{-i}\right) < y \text{ (und } \bar{f}\left(\left(\sum_{i=0}^{n+1} d_i \cdot 10^{-i}\right) + 10^{-n-1}\right) \geq y).$$

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere

$$x_n = \sum_{i=0}^n d_i \cdot 10^{-i}.$$



Behauptung 1. Die Folge (x_n) ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. In „Dezimaldarstellung“ gilt für $n \geq m$:

$$\begin{aligned}x_n - x_m &= d_0, d_1 \dots d_m d_{m+1} \dots d_n - d_0, d_1 \dots d_m \\ &= 0, 0 \dots 0 d_{m+1} \dots d_n \\ &\leq 0, \underbrace{0 \dots 001}_m = 10^{-m}.\end{aligned}$$

Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $10^{-n_0} < \varepsilon$. Dann gilt für $m, n \geq n_0$

$$|x_n - x_m| \leq 10^{-n_0} < \varepsilon.$$

qed (Behauptung 1)

Nach dem Vollständigkeitsaxiom sei $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Da (10^{-n}) eine Nullfolge ist, ist auch $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 10^{-n})$. Nach Definition der Folge (d_n) gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$x_n < b \text{ und } x_n + 10^{-n} > a.$$

Damit ist

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + 10^{-n}) = x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b.$$

Weiter gilt nach Definition der Folge (d_n) für $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{f}(x_n) < y \text{ und } \bar{f}(x_n + 10^{-n}) \geq y.$$

Da Funktion \bar{f} stetig ist, gilt

$$y \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n + 10^{-n}) = \bar{f}(x) = f(x) = \bar{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}(x_n) \leq y$$

Damit ist $x \in [a, b]$ und $f(x) = y$. □

Satz 77. Sei $y \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. Dann existiert eine (eindeutig bestimmte) reelle Zahl $x \geq 0$, so dass $x^k = y$. Diese Zahl wird als k -te Wurzel von x , $\sqrt[k]{x}$, bezeichnet.

Beweis. Wir wenden den letzten Satz an auf das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ mit $a = 0$ und $b = y + 1$ und auf die stetige Funktion

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, f(z) = z^k.$$

Es ist

$$f(a) = 0^k = 0 \leq y < y + 1 \leq (y + 1)^k = b^k = f(b).$$

Nach dem Satz gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = x^k = y$. □

Satz 78. Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a < b$ und $c < d$. Sei die Funktion $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ stetig und **streng monoton wachsend**, d.h.

$$a \leq u < v \leq b \Rightarrow f(u) < f(v)$$

mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$. Dann gilt

- a) f ist **injektiv**, d.h. für $u, v \in [a, b]$ mit $u \neq v$ ist $f(u) \neq f(v)$;
- b) f ist **surjektiv**, d.h. für alle $y \in [c, d]$ existiert $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$;
- c) f ist **bijektiv**, d.h. f ist injektiv und surjektiv;
- d) f besitzt eine eindeutig bestimmte **Umkehrfunktion** $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$, so dass für alle $x \in [a, b]$: $f^{-1}(f(x)) = x$, und sodass für alle $y \in [c, d]$: $f(f^{-1}(y)) = y$;
- e) f^{-1} ist bijektiv und streng monoton wachsend;
- f) f^{-1} ist stetig.

Beweis. $a)$ ist klar, denn $f(u) < f(v)$ impliziert $f(u) \neq f(v)$.

$b)$ folgt unmittelbar aus dem Zwischenwertsatz.

$c)$ folgt aus $a)$ und $b)$.

$d)$ Definiere $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ dadurch, dass $f^{-1}(y)$ das nach $c)$ eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$ ist.

Sei $x \in [a, b]$. Nach der Definition von f^{-1} ist $f^{-1}(f(x))$ das eindeutige x' mit $f(x') = f(x)$. Wegen der Injektivität von f ist $x' = x$ und $f^{-1}(f(x)) = x$. Sei nun $y \in [c, d]$. Dann ist $f^{-1}(y)$ das eindeutig bestimmte x mit $f(x) = y$. Dann ist $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$.

e) f^{-1} ist injektiv: seien $y, y' \in [c, d]$ und $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. Dann ist

$$y = f(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(y')) = y'.$$

f^{-1} ist surjektiv: sei $x \in [a, b]$. Dann ist $f^{-1}(f(x)) = x$, d.h. x liegt im **Bild** von f^{-1} .

f^{-1} wächst streng monoton: seien $y, y' \in [c, d]$ mit $y < y'$. Angenommen $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y')$. Wegen des strengen Wachstums von f ist dann

$$y = f(f^{-1}(y)) \geq f(f^{-1}(y')) = y',$$

Widerspruch.

f) f^{-1} ist stetig: wir beweisen hier nur Stetigkeit an Stellen $y \in [c, d]$ mit $c < y < d$. Sei $\varepsilon > 0$. Sei $x = f^{-1}(y) \in [a, b]$. Wegen der strengen Monotonie von f^{-1} ist $a < x < b$. Wähle $\varepsilon' > 0$ mit $\varepsilon' < \varepsilon$ und

$$a < x - \varepsilon' < x < x + \varepsilon' < b.$$

Wegen der strengen Monotonie von f ist

$$c = f(a) < f(x - \varepsilon') < f(x) = y < f(x + \varepsilon') < f(b) = d.$$

Wähle ein $\delta > 0$, so dass

$$f(x - \varepsilon') < y - \delta < y < y + \delta < f(x + \varepsilon').$$

Wenn nun $|y' - y| < \delta$, so ist $f(x - \varepsilon') < y' < f(x + \varepsilon')$ und $f^{-1}(y) - \varepsilon < x - \varepsilon' = f^{-1}(f(x - \varepsilon')) < f^{-1}(y') < f^{-1}(f(x + \varepsilon')) = x + \varepsilon' < f^{-1}(y) + \varepsilon$.

D.h. $|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| < \varepsilon$. Also ist f an der Stelle y stetig. □

Satz 79.

- a) *Die Funktion $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist streng monoton wachsend.*
- b) *$\exp: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty) = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist surjektiv.*
- c) *\exp hat eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, den natürlichen Logarithmus.*
- d) *$\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und streng monoton wachsend.*
- e) *Es gilt $\log(1) = 0$, $\log(e) = 1$ und für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ ist*

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y).$$

Beweis. a) Für $x > 0$ ist $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1$. Für $x < 0$ ist

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} > 0.$$

Wegen $\exp(0) = 1$ bildet \exp die reelle Achse \mathbb{R} in die positive reelle Achse \mathbb{R}^+ ab. Für die Monotonie betrachte reelle Zahlen $x < x'$. Weil $\exp(x' - x) > 1$, ist

$$\exp(x') = \exp((x' - x) + x) = \exp(x' - x) \cdot \exp(x) > \exp(x).$$

b) Sei $y \in \mathbb{R}^+$. Aus dem Archimedischen Axiom folgt die Existenz einer natürlichen Zahl n , so dass $e^{-n} < y < e^n$. Da die Exponentialfunktion stetig ist, liefert der Zwischenwertsatz ein $x \in [-n, n]$ mit $\exp(x) = y$.

c) und *d)*. Die Existenz einer eindeutig bestimmten, stetigen und streng monoton wachsenden Umkehrfunktion $\log: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ folgt aus dem vorangehenden Satz.

e) Aus $\exp(0) = 1$ und $\exp(1) = e$ folgt $\log(1) = 0$ und $\log(e) = 1$. Für $x, y \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\exp(\log(x \cdot y)) = x \cdot y = \exp(\log(x)) \cdot \exp(\log(y)) = \exp(\log(x) + \log(y)).$$

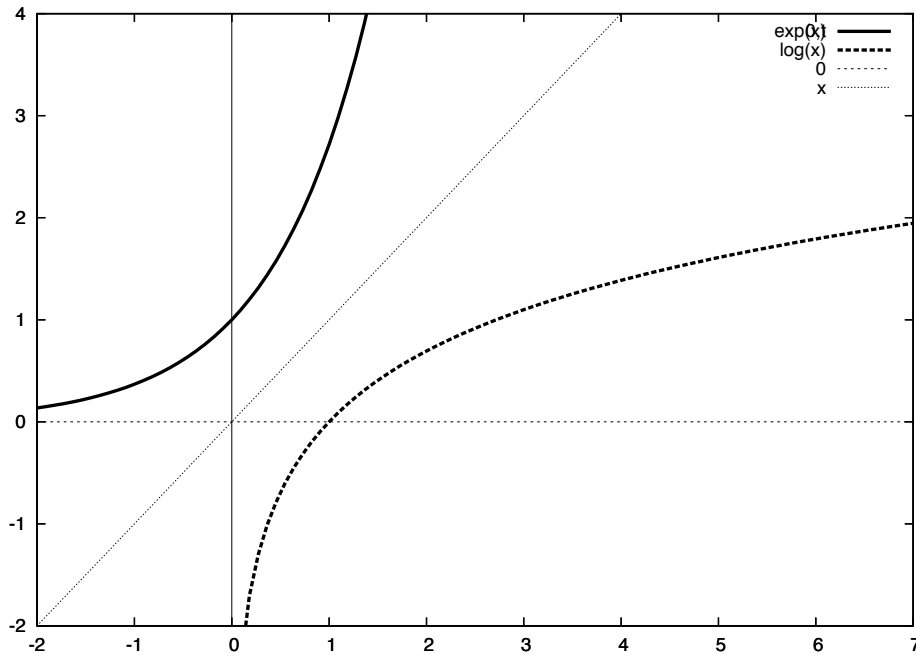
Da \exp eine injektive Funktion ist, ist

$$\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$$

□

This is a TeXmacs interface for GNUplot.

```
GNUplot] set xrange [-2:7]; set yrange [-2:4]; plot exp(x)  
with lines lw 5, log(x) with lines lw 5, 0 , x; set  
parametric; plot 0,t
```



```
GNUplot]
```


Trigonometrische Funktionen

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe ist

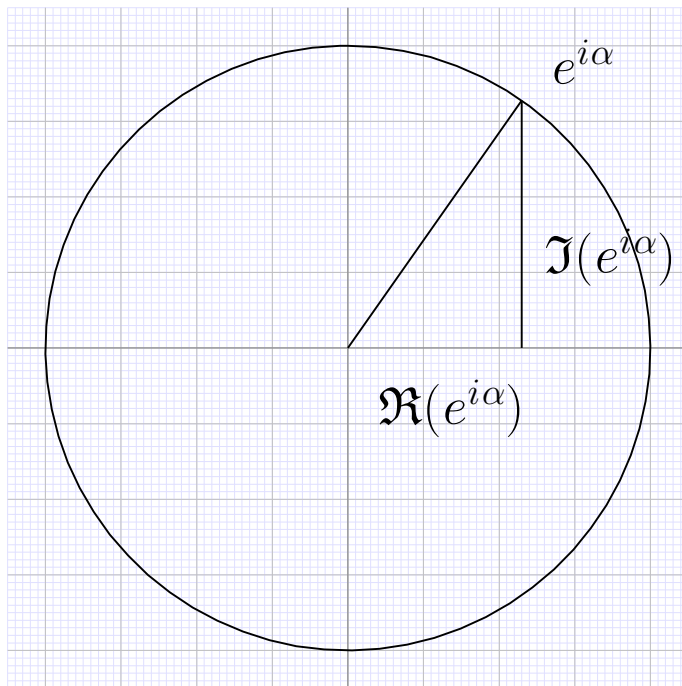
$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ e^{-i\alpha} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\alpha)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} - i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} |e^{i\alpha}| &= \sqrt{(\Re(e^{i\alpha}))^2 + (\Im(e^{i\alpha}))^2} = \sqrt{(\Re(e^{i\alpha}) + i\Im(e^{i\alpha}))(\Re(e^{i\alpha}) - i\Im(e^{i\alpha}))} \\ &= \sqrt{e^{i\alpha} e^{-i\alpha}} = \sqrt{e^0} = \sqrt{1} = 1 \end{aligned}$$

Die Exponentialfunktion bildet die imaginäre Achse $i \mathbb{R}$ in den komplexen Einheitskreis ab:

$$\exp: i \mathbb{R} \rightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$



Daraus ergeben sich die Definitionen der **Cosinus-** und der **Sinusfunktion**:

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha) = \Re(e^{i\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} \mp \dots$$

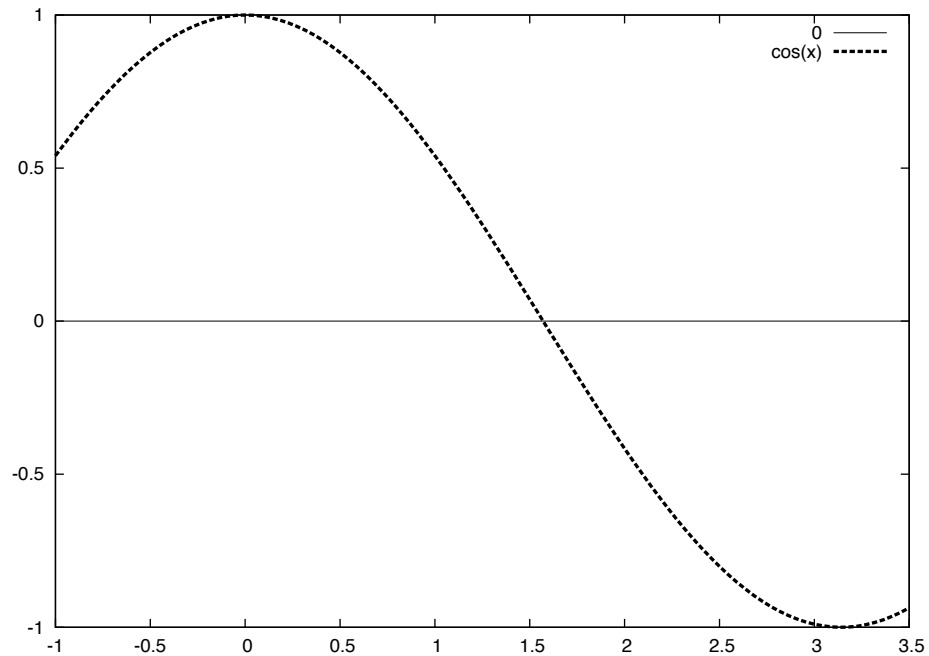
$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin(\alpha) = \Im(e^{i\alpha}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} \mp \dots$$

Es gilt $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$. Für komplexe Zahlen $z = x + i\alpha$ ist

$$e^z = e^{x+i\alpha} = e^x e^{i\alpha} = e^x (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Satz 80. Die Cosinusfunktion $\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ ist stetig. Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < 0$. Auf dem Intervall $[0, 2]$ ist die Cosinusfunktion streng monoton fallend. Die Funktion \cos hat in dem Intervall $[0, 2]$ eine eindeutig bestimmte Nullstelle $\frac{\pi}{2}$, mit $\pi = 3,14\dots$.

```
GNUplot] set xrange [-1:3.5]; set yrange [-1:1]; plot 0, cos(x) with lines lw 5
```

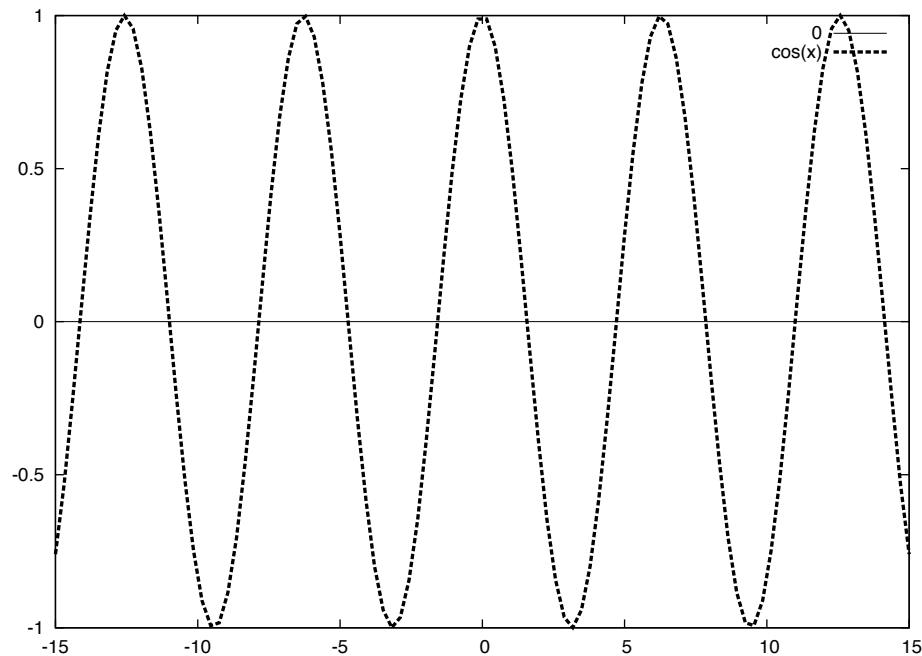


```
GNUplot]
```

Satz 81. Die Cosinusfunktion ist periodisch mit der Periode ($\hat{=}$ Frequenz) 2π , d.h. $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.

Beweis. $\cos(x + 2\pi) = \Re(e^{i(x+2\pi)}) = \Re(e^{ix} e^{i2\pi}) = \Re(e^{ix} (e^{i\frac{\pi}{2}})^4)$
 $= \Re(e^{ix} (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})^4) = \Re(e^{ix} (0 + i)^4) = \Re(e^{ix} (i^4)) = \Re(e^{ix}) = \cos(x). \quad \square$

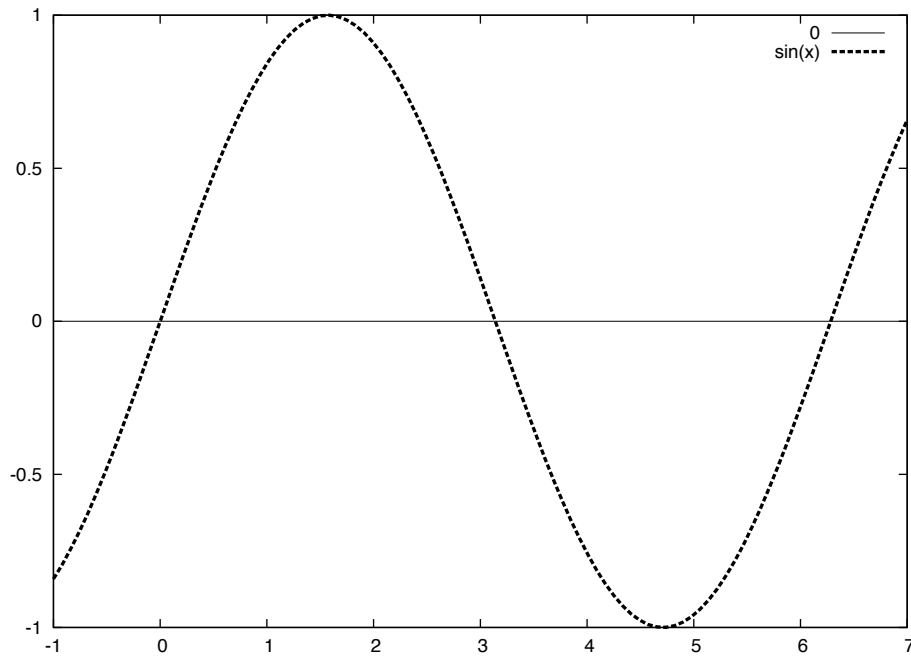
GNUplot] set xrange [-15:15]; set yrange [-1:1]; plot 0, cos(x) with lines lw 5



GNUplot]

Satz 82. Die Sinusfunktion $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, +1]$ ist stetig. Es gilt $\sin(0) = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. Die Sinusfunktion hat die Periode 2π .

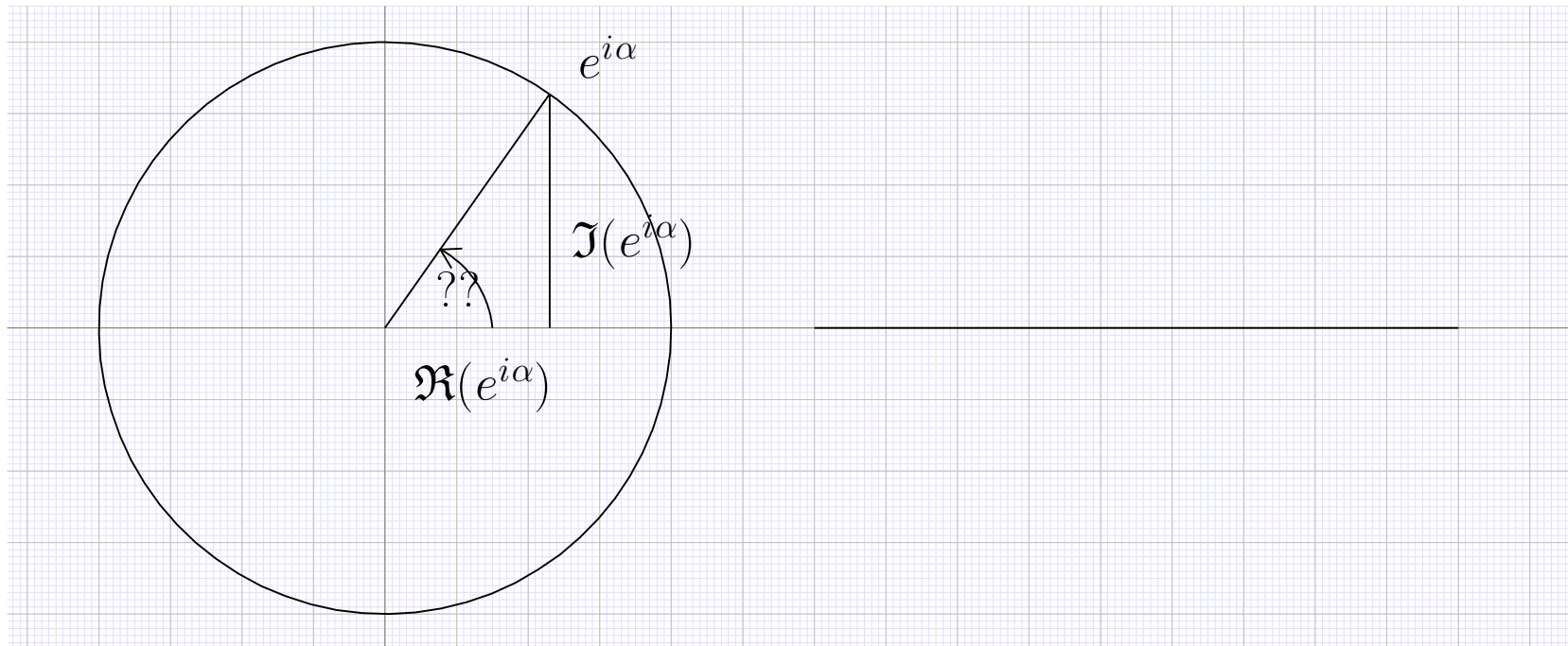
```
GNUplot] set xrange [-1:7]; set yrange [-1:1]; plot 0, sin(x) with lines lw 5
```



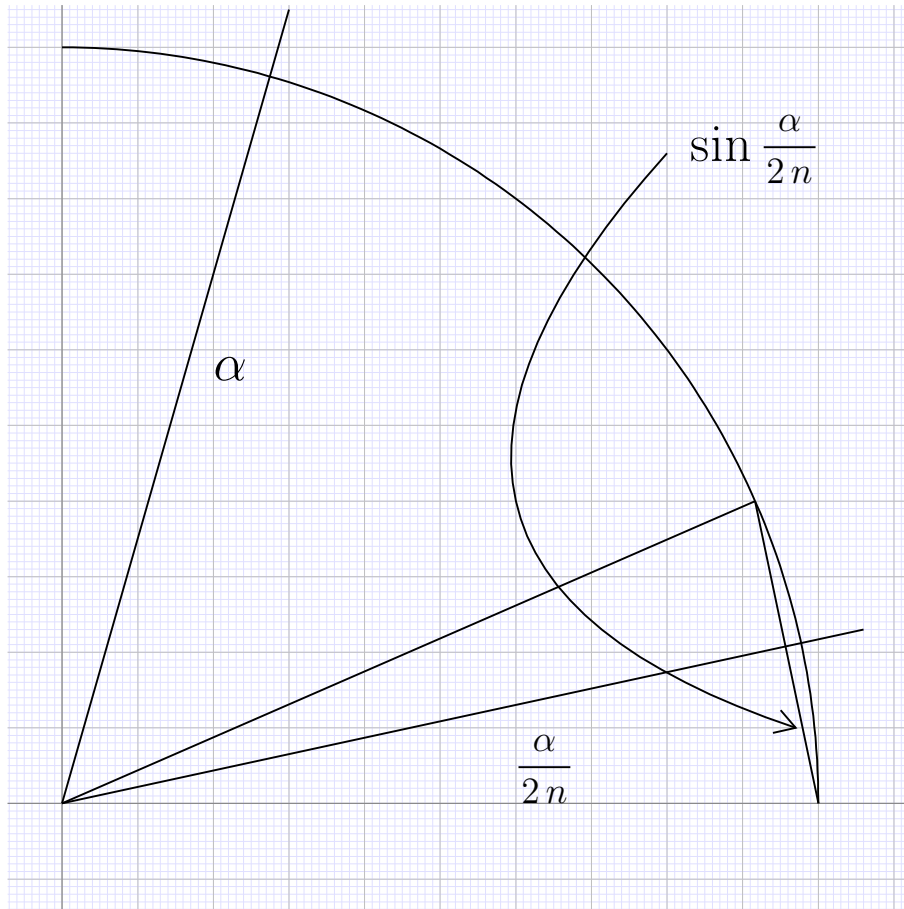
```
GNUplot]
```

Das Bogenmaß

Der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Vektor $e^{i\alpha}$ wird zweckmäßig mit α bezeichnet. Damit wird der Winkel im **Bogenmaß** gemessen: α ist die Länge des Kreisbogens von 1 bis $e^{i\alpha}$. Das Bogenmaß ist zum **Gradmaß** proportional: $\frac{\pi}{2} \sim 90^\circ$, d.h. $\alpha \sim \left(\frac{2\alpha}{\pi} 90\right)^\circ$.



Die Bogenlänge eines Kreisbogens mit Radius 1 und Winkel α lässt sich approximieren, indem der Bogen in n gleiche Teilbögen zerlegt wird und die Längen $2 \sin \frac{\alpha}{2n}$ der zugehörigen **Sehnen** oder **Sekanten** summiert werden.



Die Länge des Kreisbogens zum Radius 1 und Winkel $\alpha > 0$ ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \sin \frac{\alpha}{2n} \right).$$

$$2n \sin \frac{\alpha}{2n} = 2n \left(\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha^3}{3! (2n)^3} + \frac{\alpha^5}{5! (2n)^5} \mp \dots \right)$$

Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ kann das abgeschätzt werden als

$$\alpha - \frac{\alpha^3}{3! (2n)^2} = 2n \left(\frac{\alpha}{2n} - \frac{\alpha^3}{3! (2n)^3} \right) < 2n \sin \frac{\alpha}{2n} < 2n \frac{\alpha}{2n} = \alpha$$

Damit ist

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha - \frac{\alpha^3}{3! (2n)^2} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \sin \frac{\alpha}{2n} \right) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha = \alpha$$

Damit hat ein Winkel α die Bogenlänge (=Bogenmaß) α .

Satz 83. *Ein Kreis vom Radius $r > 0$ hat den Umfang $2 \pi r$.*

Beweis. Für den Radius r haben die Sehnen in der obigen Abschätzung die Länge $r \sin \frac{\alpha}{2n}$. Der Kreisumfang ist dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 n r \sin \frac{2 \pi}{2 n}) = r \lim_{n \rightarrow \infty} (2 n \sin \frac{2 \pi}{2 n}) = r 2 \pi .$$

□

Satz 84. *Die Tangensfunktion*

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

ist auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{n \pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{\alpha \mid \cos \alpha = 0\}$ definiert und stetig.

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist der **linke Limes**

$$\lim_{\alpha \nearrow n\pi + \frac{\pi}{2}} \tan \alpha = +\infty,$$

d.h. für alle $Z \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\alpha \in \left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \delta, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \longrightarrow \tan \alpha > Z.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist der **rechte Limes**

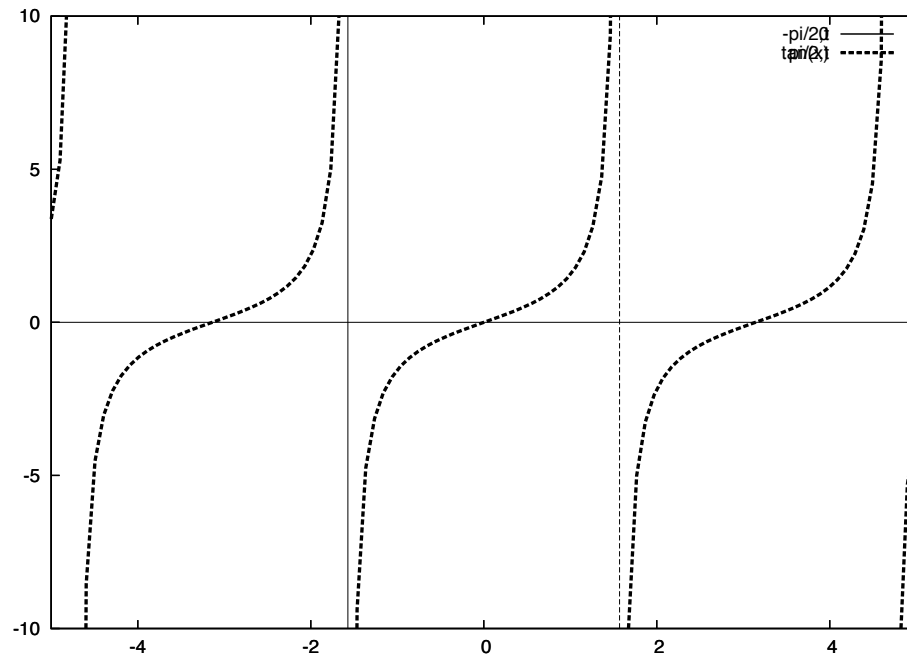
$$\lim_{\alpha \searrow n\pi + \frac{\pi}{2}} \tan \alpha = -\infty,$$

d.h. für alle $Z \in \mathbb{R}$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\alpha \in \left(n\pi + \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2} + \delta\right) \longrightarrow \tan \alpha < Z.$$

Damit sind die Geraden $\{(x, y) \mid x = n\pi + \frac{\pi}{2}\}$ **Asymptoten** (griech. „nicht übereinstimmend“) der Tangensfunktion.

```
GNUplot] set xrange [-5:5]; set yrange [-10:10]; plot 0, tan(x) with lines lw 5; set  
parametric; set trange [-10:10]; plot -pi/2,t, pi/2,t
```



```
GNUplot]
```

Satz 85. *Die Cotangensfunktion*

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ist auf der Menge $\mathbb{R} \setminus \{n \pi \mid n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R} \setminus \{\alpha \mid \sin \alpha = 0\}$ definiert und stetig.

Für $n \in \mathbb{Z}$ ist

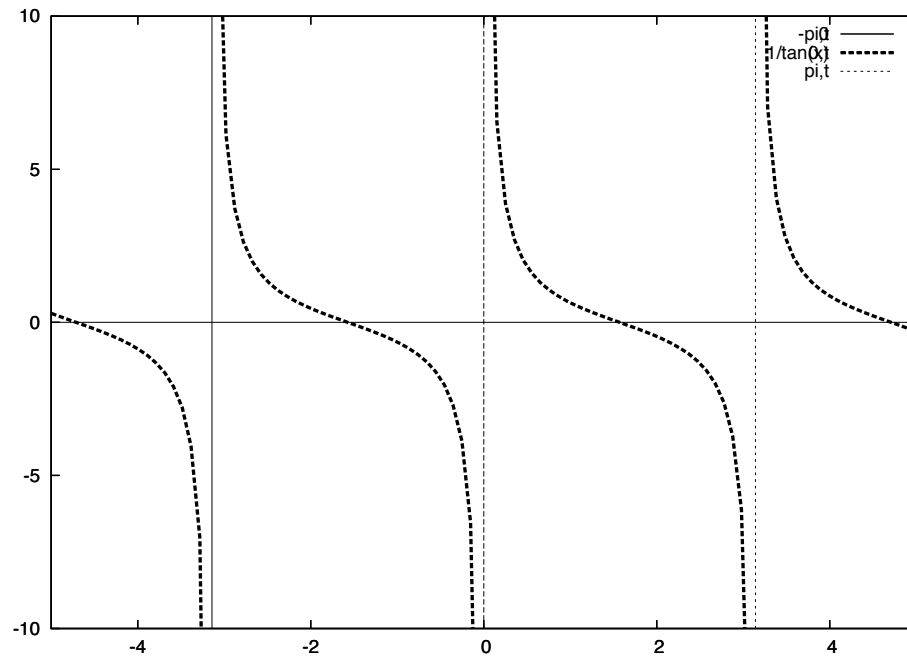
$$\lim_{\alpha \rightarrow -(-n\pi)} \cot \alpha = -\infty$$

und

$$\lim_{\alpha \rightarrow +(-n\pi)} \cot \alpha = +\infty$$

Die Geraden $\{(x, y) \mid x = n \pi\}$ sind Asymptoten der Cotangensfunktion.

```
GNUplot] set xrange [-5:5]; set yrange [-10:10]; plot 0, 1/tan(x) with lines lw 5; set
parametric; set trange [-10:10]; plot -pi,t, 0,t, pi,t
```



```
GNUplot]
```

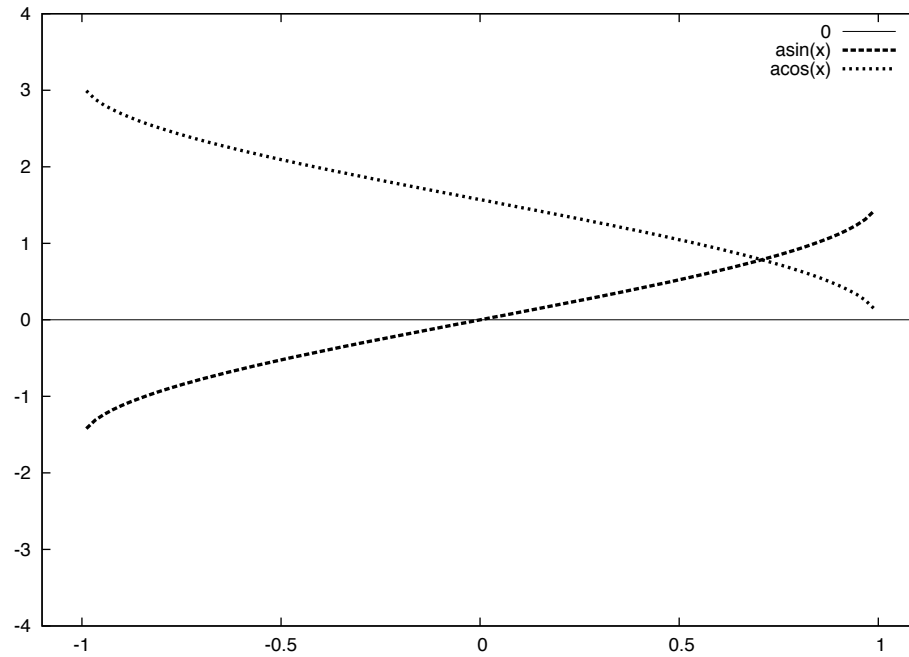

Trigonometrische Umkehrfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen sind auf Intervallen in der Nähe der 0 streng monoton (wachsend oder fallend) und stetig. Sie besitzen daher streng monotone und stetige Umkehrfunktionen.

Definition 86.

- a) Der **Arcuscosinus** $\arccos := \cos^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, +1]$.
- b) Der **Arcussinus** $\arcsin := \sin^{-1}: [-1, +1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\sin: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, +1]$.
- c) Der **Arcustangens** $\arctan := \tan^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.
- d) Der **Arcuscotangens** $\operatorname{arccot} := \cot^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$ ist die Umkehrfunktion der Funktion $\cot: (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$.

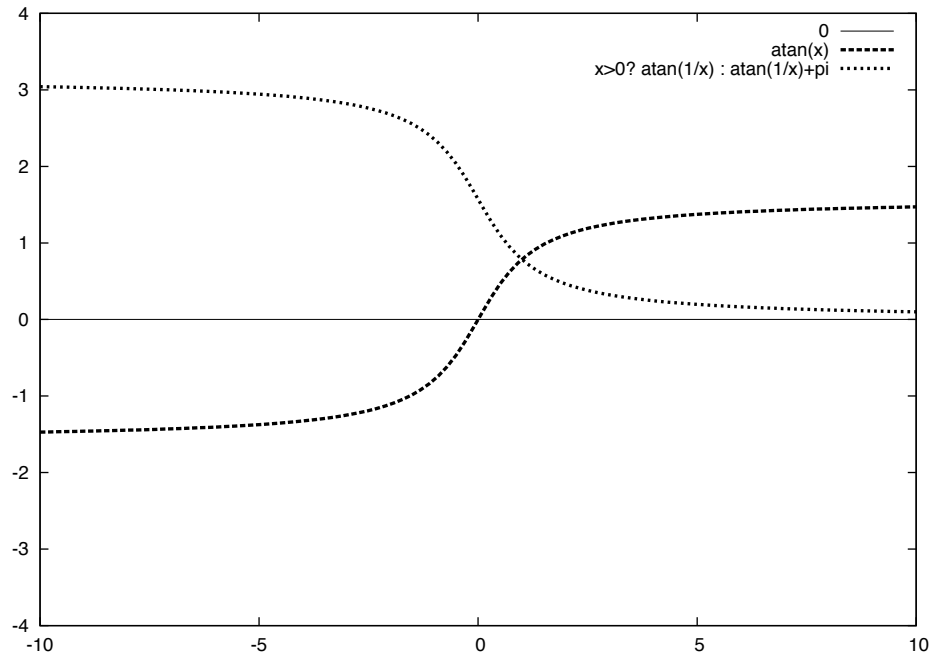
```
GNUplot] set xrange [-1.1:1.1]; set yrange [-4:4]; plot 0, asin(x) with lines lw 5, acos(x)
with lines lw 5
```



```
GNUplot]
```

Note that $\operatorname{arccot}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ since $\cot\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

```
GNUplot] set xrange [-10:10]; set yrange [-4:4]; plot 0, atan(x) with lines lw 5, x>0?
atan(1/x) : atan(1/x)+pi with lines lw 5
```



```
GNUplot]
```

Ableitungen

Definition 87. Sei $M \subseteq \mathbb{C}$ und $f: M \rightarrow \mathbb{C}$. f ist an der Stelle $z \in M$ **differenzierbar**, falls

$$\lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

existiert. Das heißt, dass es genau eine Zahl $f'(z) \in \mathbb{C}$ gibt, so dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit

$$|y - z| < \delta, y \in M \text{ und } y \neq z \text{ impliziert } \left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} - f'(z) \right| < \varepsilon.$$

Dann ist $f'(z)$ die **Ableitung** von f an der Stelle z . Wenn f an jeder Stelle $z \in M$ differenzierbar ist, so heißt f **differenzierbar** und $f': M \rightarrow \mathbb{C}$ ist die **Ableitung** von f . Wenn f' stetig ist, so heißt f **stetig differenzierbar**.

Satz 88. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist die Funktion z^n auf \mathbb{C} stetig differenzierbar und

$$(z^n)' = n z^{n-1}.$$

Beweis. Für $y \neq z$ ist

$$\frac{y^n - z^n}{y - z} = y^{n-1} + y^{n-2} z + \dots + y z^{n-2} + z^{n-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow z} \frac{y^n - z^n}{y - z} &= \lim_{y \rightarrow z} (y^{n-1} + y^{n-2} z + \dots + y z^{n-2} + z^{n-1}) \\ &= \lim_{y \rightarrow z} y^{n-1} + \lim_{y \rightarrow z} y^{n-2} z + \dots + \lim_{y \rightarrow z} y z^{n-2} + \lim_{y \rightarrow z} z^{n-1} \\ &= \underbrace{z^{n-1} + \dots + z^{n-1}}_n \\ &= n z^{n-1}. \end{aligned}$$

□

Satz 89. Wenn $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $z \in M$ differenzierbar ist, so ist f an der Stelle z stetig.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f'(z) = \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$ existiert, gibt es $\delta > 0$ mit

$$\delta < \frac{\varepsilon}{|f'(z)| + \varepsilon}$$

und

$$|y - z| < \delta, y \in M, y \neq z \longrightarrow \left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} - f'(z) \right| < \varepsilon.$$

Dann ist

$$\left| \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \right| < |f'(z)| + \varepsilon$$

und

$$|f(y) - f(z)| < |y - z| \cdot (|f'(z)| + \varepsilon) < \frac{\varepsilon}{|f'(z)| + \varepsilon} \cdot (|f'(z)| + \varepsilon) = \varepsilon$$

□

Satz 90.

- a) Die konstante Funktion c ist auf \mathbb{C} stetig differenzierbar mit Ableitung 0 .
- b) Die identische Funktion z ist auf \mathbb{C} stetig differenzierbar mit Ableitung 1 .

Seien $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ an der Stelle $z \in M$ differenzierbar. Dann gilt

- i. $f + g$ ist an der Stelle z differenzierbar und $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$.
- ii. (**Produktregel**) $f \cdot g$ ist an der Stelle z differenzierbar und

$$(f \cdot g)'(z) = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z).$$

- iii. (**Quotientenregel**) Wenn $g(z) \neq 0$ so ist $\frac{f}{g}$ an der Stelle z differenzierbar und

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g(z)^2}$$

Beweis. a) $\lim_{y \rightarrow z} \frac{c-c}{y-z} = \lim_{y \rightarrow z} 0 = 0$.

b) folgt aus dem vorangehenden Satz, oder direkt wegen

$$\lim_{y \rightarrow z} \frac{y-z}{y-z} = \lim_{y \rightarrow z} 1 = 1.$$

i) Der Grenzwert $\lim_{y \rightarrow z}$ erfüllt einfache Gesetze bezüglich Addition, Multiplikation, usw. Daraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow z} \frac{(f+g)(y) - (f+g)(z)}{y-z} &= \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) + g(y) - f(z) - g(z)}{y-z} \\ &= \lim_{y \rightarrow z} \left(\frac{f(y) - f(z)}{y-z} + \frac{g(y) - g(z)}{y-z} \right) \\ &= \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y-z} + \lim_{y \rightarrow z} \frac{g(y) - g(z)}{y-z} \\ &= f'(z) + g'(z). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow z} \frac{(f \cdot g)(y) - (f \cdot g)(z)}{y - z} = \\ & \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) \cdot g(y) - f(z) \cdot g(z)}{y - z} = \\ & \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) \cdot g(y) - f(z) \cdot g(y) + f(z) \cdot g(y) - f(z) \cdot g(z)}{y - z} = \\ & \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) \cdot g(y) - f(z) \cdot g(y)}{y - z} + \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(z) \cdot g(y) - f(z) \cdot g(z)}{y - z} = \\ & \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \cdot \lim_{y \rightarrow z} g(y) + f(z) \cdot \lim_{y \rightarrow z} \frac{g(y) - g(z)}{y - z} = \\ & f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z) \end{aligned}$$

iii) Da $g(z) \neq 0$ und da g an der Stelle z stetig ist, ist $g(y) \neq 0$ wenn $|y - z|$ klein genug ist.

$$\begin{aligned}
 & \lim_{y \rightarrow z} \frac{\frac{f}{g}(y) - \frac{f}{g}(z)}{y - z} = \\
 & \lim_{y \rightarrow z} \frac{\frac{f(y)}{g(y)} - \frac{f(z)}{g(z)}}{y - z} = \\
 & \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y)g(z) - f(z)g(y)}{(y - z)g(y)g(z)} = \\
 & \lim_{y \rightarrow z} \frac{1}{g(y)g(z)} \cdot \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y)g(z) - f(z)g(z) + f(z)g(z) - f(z) \cdot g(y)}{y - z} = \\
 & \frac{1}{g(z)^2} \cdot \left(g(z) \cdot \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} - f(z) \cdot \lim_{y \rightarrow z} \frac{g(y) - g(z)}{y - z} \right) = \\
 & \frac{1}{g(z)^2} \cdot (g(z) \cdot f'(z) - f(z) \cdot g'(z))
 \end{aligned}$$

□

Daraus ergibt sich sofort:

Satz 91. *Wenn $f, g: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar sind, so sind auch $f + g, f \cdot g: M \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit Ableitungen*

$$(f + g)' = f' + g' \text{ bzw. } (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Weiterhin ist $\frac{f}{g}: M \setminus \{z \mid g(z) = 0\} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Die Funktion $f \mapsto f'$ ist eine lineare Abbildung des Vektorraums der stetig differenzierbaren Funktionen auf M in den Vektorraum der stetigen Funktionen auf M .

Beweis. (Multiplikative Linearität) Für einen Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ ist

$$(\lambda \cdot f)' = (\text{const}_\lambda)' \cdot f + \text{const}_\lambda \cdot f' = 0 \cdot f + \lambda \cdot f' = \lambda \cdot f'. \quad \square$$

Satz 92. Für $n \geq 1$ und $z \neq 0$ ist $\left(\frac{1}{z^n}\right)' = -\frac{n}{z^{n+1}}$, d.h. $(z^{-n})' = -n z^{-n-1}$.

Beweis. Nach der Quotientenregel ist

$$\left(\frac{1}{z^n}\right)' = \frac{1' \cdot z^n - 1 \cdot n \cdot z^{n-1}}{z^{2n}} = -\frac{n \cdot z^{n-1}}{z^{2n}} = -\frac{n}{z^{n+1}}. \quad \square$$

Satz 93. Ein Polynom

$$p(z) = c_{n+1} z^{n+1} + c_n z^n + \dots + c_0$$

vom Grad $n+1$ ist stetig differenzierbar. Die Ableitung von p ist ein Polynom

$$p'(z) = (n+1) c_{n+1} z^n + n c_n z^{n-1} + \dots + c_1$$

vom Grad n .

Das Ableiten von Funktionen kann mehrfach ausgeführt oder *iteriert* werden.

Definition 94. *Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ ist 1-fach differenzierbar, wenn f im obigen Sinn differenzierbar ist. Dann ist die erste Ableitung von f die gewöhnliche Ableitung von f . Wenn f n -fach differenzierbar mit n -ter Ableitung $f^{(n)}$ ist, so heißt f $(n + 1)$ -fach differenzierbar, wenn $f^{(n)}$ differenzierbar ist. Die $n + 1$ -ste Ableitung von f ist dann definiert als*

$$f^{(n+1)} = (f^{(n)})'.$$

In der Mechanik haben die Ableitungen einer (genügend oft differenzierbaren) Ortsfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ einfache physikalische Bedeutungen:

- $f(t)$ ist die **Ortskoordinate** zum Zeitpunkt t
- $f'(t)$ ist die **Geschwindigkeit** zur Zeit t
- $f''(t) = f^{(2)}(t)$ ist die **Beschleunigung** zur Zeit t

Differentialgleichungen

Definition 95. *Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung ist ein Ausdruck der Form*

$$F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

*Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine **Lösung** der Differentialgleichung, wenn f n -fach differenzierbar ist und für alle $z \in M$ gilt*

$$F(z, f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z)) = 0.$$

Ein Ausdruck der Form

$$y^{(n)} = F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

*ist eine **explizite gewöhnliche Differentialgleichung n -ter Ordnung.***

Die meisten physikalischen Gesetze lassen sich mit Hilfe von Differentialgleichungen formulieren.

Das 2. NEWTONsche Gesetz, Kraft = Masse \times Beschleunigung, ist

$$F = m f''.$$

Im (homogenen) Schwerfeld der Erde ist die Trägheitskraft F der Schwerkraft $m g_{\text{Erde}}$ entgegengesetzt

$$F = -m g_{\text{Erde}}.$$

Der (eindimensionale) *freie Fall* eines Massepunktes im Schwerfeld wird beschrieben durch die explizite gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f'' = -g_{\text{Erde}}.$$

Wir versuchen, diese Gleichung durch einen Polynomansatz zu lösen

$$\begin{aligned} f(t) &= c_n t^n + \dots c_2 t^2 + c_1 t + c_0 \\ f'(t) &= n c_n t^{n-1} + \dots + 2 c_2 t + c_1 \\ f''(t) &= (n-1) n c_n t^{n-2} + \dots + 2 c_2 = -g_{\text{Erde}} \end{aligned}$$

Dann ist $c_n = c_{n-1} = \dots = c_3 = 0$ und $c_2 = -\frac{1}{2} g_{\text{Erde}}$. Der Koeffizienten c_1 und c_0 können frei gewählt werden. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$f(t) = -\frac{1}{2} g_{\text{Erde}} t^2 + c_1 t + c_0$$

mit $c_1, c_0 \in \mathbb{R}$.

Der „Anfangsort“ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$f(0) = c_0.$$

Die „Anfangsgeschwindigkeit“ zum Zeitpunkt $t = 0$ ist

$$f'(0) = (-g_{\text{Erde}} t + c_1)(0) = c_1.$$

Die Menge der Lösungen bildet einen durch c_0 und c_1 parametrisierten 2-dimensionalen reellen Vektorraum. Durch Vorgaben von Anfangswerten c_0 und c_1 ist die Bewegungsgleichung des Massepunktes eindeutig bestimmt.

Satz 96. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere absolut für $|z| < R$. Dann ist die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ stetig differenzierbar für alle z mit $|z| < R$. Die Ableitung ist durch die Potenzreihe

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$$

gegeben, die für $|z| < R$ absolut konvergiert.

Beweis. (1) Für alle $|z| < R$ konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ absolut.

Beweis: Sei $|z| < r < s < R$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$ absolut konvergiert, gibt es eine obere Schranke $M \in \mathbb{R}$ mit

$$|a_n s^n| < M.$$

Dann ist

$$|(n+1) a_{n+1} z^n| = |(n+1) a_{n+1} s^{n+1} \frac{z^n}{s^{n+1}}| \leq (n+1) M \frac{r^n}{s^{n+1}}$$

Also majorisiert $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) M \frac{r^n}{s^{n+1}}$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$.

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) M \frac{r^n}{s^{n+1}}$ konvergiert nach dem Quotientenkriterium absolut, denn für genügend großes n ist

$$\frac{(n+2) M \frac{r^{n+1}}{s^{n+2}}}{(n+1) M \frac{r^n}{s^{n+1}}} = \frac{(n+2) r}{(n+1) s} < \frac{r}{s} + \varepsilon < 1.$$

Also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n$ absolut. *qed*(1)

Sei nun $|z_0| < R$. Wähle (ein „neues“) r mit $|z_0| < r < R$. Zur Bestimmung der Ableitung sei $\varepsilon > 0$. Nach (1) wähle ein $n_0 \geq 1$, so dass

$$\left| \sum_{n=n_0}^{\infty} n a_n r^n \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weil $\sum_{n=0}^{n_0-1} (n+1) a_{n+1} z_0^n$ die Ableitung des *Polynoms* $\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n$ an der Stelle z_0 ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass $|z_0| + \delta < r$, und so dass für alle $z \neq z_0$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$\left| \frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{n_0-1} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Dann gilt für alle $z \neq z_0$ mit $|z - z_0| < \delta$:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right| \\
\leq & \left| \frac{\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{n_0-1} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right| + \\
& + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{a_n z^n - a_n z_0^n}{z - z_0} \right| + \left| \sum_{n=n_0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z_0^n \right| \\
< & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (z^{n-1} + z^{n-2} z_0 + \dots + z_0^{n-1}) \right| \\
\leq & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (r^{n-1} + r^{n-2} r + \dots + r^{n-1}) \right| \\
= & \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} n a_n r^{n-1} \right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Durch *Iteration* dieses Satzes ergibt sich:

Satz 97. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere absolut für $|z| < R$. Dann ist die Funktion $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ **beliebig oft stetig differenzierbar** für alle z mit $|z| < R$, d.h., dass für alle $k \in \mathbb{N}$ $f(z)$ k -fach stetig differenzierbar für alle $|z| < R$ ist.

Es gilt

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k}$$

Beweis. (Vollständige Induktion über k) Trivial für $k=0$. Induktionsschritt:

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(z) &= (f^{(k)})'(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k} \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)(n-k) a_n z^{n-k-1} \end{aligned}$$

□

Satz 98. Die Exponentialfunktion \exp ist auf \mathbb{C} stetig differenzierbar mit der Ableitung

$$\exp' = \exp .$$

Die Exponentialfunktion ist eine Lösung der Differentialgleichung $y' = y$.
Sie ist ein **Fixpunkt** des Ableitungsoperators.

Beweis. Wir leiten die Exponentialreihe

$$\exp = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

gliedweise ab:

$$\exp' = (e^z)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z = \exp.$$

□

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen

Satz 99.

$$a) \sin' = \cos$$

$$b) \cos' = -\sin$$

$$c) \tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

$$d) \cot' = -\frac{1}{\sin^2}$$

Beweis. a) Durch gliedweises Ableiten der Potenzreihe

$$\sin'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos(z)$$

b)

$$\begin{aligned}\cos'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin(z).\end{aligned}$$

c) Nach der Quotientenregel ist

$$\tan'(z) = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)'(z) = \frac{\cos(z) \cdot \cos(z) + \sin(z) \cdot \sin(z)}{\cos^2(z)} = \frac{1}{\cos^2(z)}$$

d)

$$\cot'(z) = \left(\frac{\cos}{\sin} \right)'(z) = \frac{-\sin(z) \cdot \sin(z) - \cos(z) \cdot \cos(z)}{\sin^2(z)} = \frac{-1}{\sin^2(z)}.$$

□

Definition 100. Die Funktion $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ sei an der Stelle 0 beliebig oft differenzierbar. Dann sei die **Taylor-Reihe** von g um (den Entwicklungspunkt) 0

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Satz 101. Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere absolut für $|z| < R$. Dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ die Taylor-Reihe von f um 0, d.h.

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Beweis.

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n z^{n-k} = k! a_k + b_1 z + b_2 z^2 + \dots$$

Damit ist $f^{(k)}(0) = k! a_k$ und $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$. □

Satz 102. (Kettenregel) *Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow \mathbb{C}$ Funktionen. Die Verkettung, Komposition oder Hintereinanderausführung von g nach f ist die Funktion $g \circ f: M \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Definition*

$$(g \circ f)(z) = g(f(z)).$$

Wenn f an der Stelle $z \in M$ differenzierbar ist, und wenn g an der Stelle $f(z)$ differenzierbar ist, so ist $g \circ f$ an der Stelle z differenzierbar. Die Ableitung ist das Produkt von „äußerer“ und „innerer“ Ableitung:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

Wenn f und g (stetig) differenzierbar sind, so ist $g \circ f$ (stetig) differenzierbar mit Ableitung

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Beweis. Definiere die Funktion $g^*: N \rightarrow \mathbb{C}$,

$$g^*(u) = \begin{cases} \frac{g(u) - g(f(z))}{u - f(z)}, & \text{für } u \neq f(z) \\ g'(f(z)), & \text{für } u = f(z) \end{cases}$$

Da g in $f(z)$ differenzierbar ist, ist

$$\lim_{u \rightarrow f(z)} g^*(u) = g'(f(z)).$$

Wegen $g(u) - g(f(z)) = g^*(u) (u - f(z))$ gilt

$$\begin{aligned} (g \circ f)'(z) &= \lim_{y \rightarrow z} \frac{g(f(y)) - g(f(z))}{y - z} \\ &= \lim_{y \rightarrow z} \frac{g^*(f(y)) (f(y) - f(z))}{y - z} \\ &= \lim_{y \rightarrow z} g^*(f(y)) \times \lim_{y \rightarrow z} \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = g'(f(z)) f'(z) \end{aligned}$$

□

Satz 103. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ differenzierbar. Dann ist

$$(e^{f(z)})' = f'(z) e^{f(z)}.$$

$e^{f(z)}$ ist Lösung der Differentialgleichung

$$y' = f'(z) y.$$

Beweis.

$$(\exp(f(z)))' = \exp'(f(z)) f'(z) = \exp(f(z)) f'(z).$$

□

Ableitungen von Umkehrfunktionen

Satz 104. *Seien $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}$, und sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ streng monoton, stetig und bijektiv mit der Umkehrfunktion $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$. Sei $f(x) = y$ und sei f in x differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$. Dann ist f^{-1} in y differenzierbar mit der Ableitung*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Beweis. Beachte: $g'(y) = c$ gdw. für jede Folge (y_n) mit $y_n \neq y$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = c.$$

Sei $(y_n) \rightarrow y$ eine solche Folge. Da f^{-1} stetig und bijektiv ist, gilt für die Folge $(x_n) = (f^{-1}(y_n))$: $x_n \neq x$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y)}{y_n - y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x}} = \frac{1}{f'(x)}$$

□

Satz 105.

$$a) \log'(y) = \frac{1}{y}$$

$$b) \arccos'(y) = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$c) \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$d) \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$$

Beweis. a) Der Logarithmus ist die Umkehrung der Exponentialfunktion. Für $y > 0$ ist

$$\log'(y) = \frac{1}{\exp'(\log(y))} = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y};$$

Auf der negativen reellen Achse ist aus Symmetriegründen für $y < 0$

$$(\log |y|)' = (\log(-y))' = -\log'(-y) = -\frac{1}{-y} = \frac{1}{y}$$

Daher fassen wir meistens $\log(y)$ als die auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion $\log(|y|)$ auf.

$$b) \arccos'(y) = \frac{1}{\cos'(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sin(\arccos(y))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos(\arccos(y))^2}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

$$c) \arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(\arcsin(y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

d) Da $\tan^2(y) = \frac{\sin^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1 - \cos^2(y)}{\cos^2(y)} = \frac{1}{\cos^2(y)} - 1$, ist $\cos^2(y) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)}$. Also

$$\arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} = \cos^2(\arctan(y)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(y))} = \frac{1}{1 + y^2}$$

□

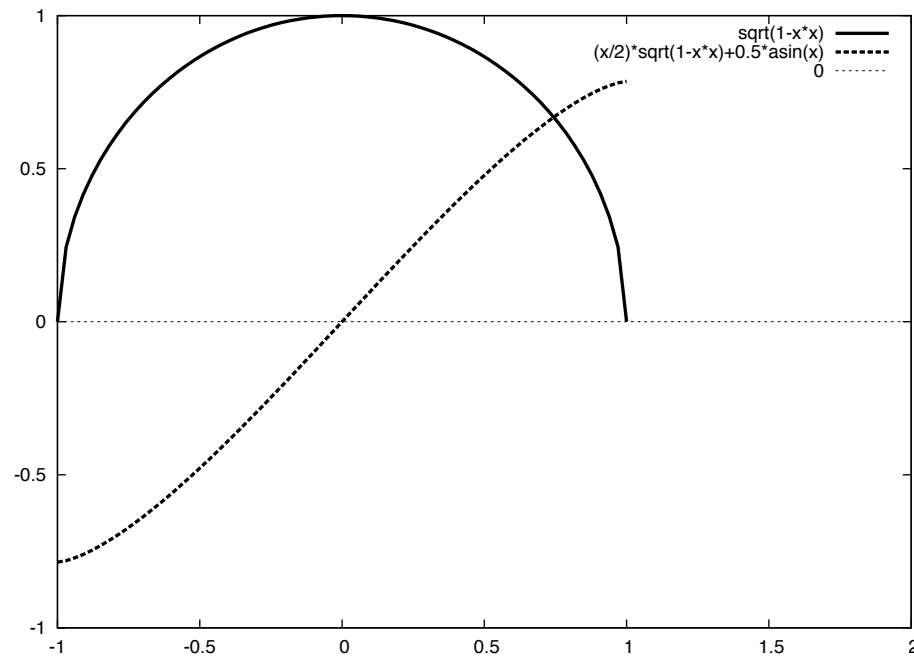
Beispiel. Für $r \neq 0$ und $r^2 \neq x^2$ ist

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right) \right)' \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{x}{2} \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r^2}{2} \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{r}\right)^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x}{2} \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \frac{r^2}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{1}{2} \frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\
 &= \sqrt{r^2 - x^2}
 \end{aligned}$$

An der Stelle $x = r$ nimmt die Funktion $\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{r} \right)$ den Wert $\frac{r^2}{2} \arccos(1) = \frac{r^2}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} r^2$ an. Das ist der **Flächeninhalt** des Viertelkreises mit Radius r .

This is a TeXmacs interface for GNUplot.

```
GNUplot] set xrange [-1:2]; set yrange [-1:1]; plot sqrt(1-x*x)  
with lines lw 5, (x/2)*sqrt(1-x*x)+0.5*asin(x) with  
lines lw 5, 0
```



```
GNUplot]
```

Stammfunktionen und unbestimmte Integrale

Zur Erinnerung:

Definition 106. *Eine implizite gewöhnliche Differentialgleichung (DGL) n -ter Ordnung ist ein Ausdruck der Form*

$$F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine Lösung der DGL, wenn f n -fach differenzierbar ist und für alle $z \in M$ gilt

$$F(z, f(z), f'(z), f''(z), \dots, f^{(n)}(z)) = 0.$$

Ein Ausdruck der Form

$$y^{(n)} = F(z, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

ist eine explizite gewöhnliche DGL n -ter Ordnung.

Der einfachste Fall ist die Differentialgleichung

$$y' = g(z).$$

Satz 107. Sei $g: M \rightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine **Stammfunktion** von g , wenn f auf M differenzierbar ist und für alle $z \in M$ gilt:

$$f'(z) = g(z)$$

D.h.: f ist Stammfunktion von g gdw. f eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(z)$$

*ist. Eine Stammfunktion f von g wird auch als **unbestimmtes Integral** von g bezeichnet: $f = \int g \, dx$. Stammfunktionen sind nicht eindeutig bestimmt. Wenn f Stammfunktion von g ist, so ist auch $f + C$ eine Stammfunktion von g für jede Konstante $C \in \mathbb{C}$.*

Beweis. $(f + C)' = f' + 0 = g(z)$. □

Die Bestimmung von Stammfunktionen als Kombination bekannter Funktionen ist i.A. nicht schematisch durchführbar. Es gibt umfangreiche Listen mit Stammfunktionen, Heuristiken und entsprechende Software. Z.B.

$$\int \sqrt{r^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right).$$

(%i24) `integrate (sqrt(r^2-x^2),x)`

(%o24)
$$\frac{r^2 \arcsin\left(\frac{x}{|r|}\right)}{2} + \frac{x \sqrt{r^2 - x^2}}{2}$$

(%i26) `integrate (exp(-x^2),x)`

(%o26)
$$\frac{\sqrt{\pi} \operatorname{erf}(x)}{2}$$

(%i27)

Dabei ist erf die „error function“ einer Gaußschen Fehlerkurve.

Satz 108. (Integration von Polynomen)

$$\int (a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0) dx = \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} z^n + \dots + a_0 z + C$$

Satz 109. (Integration von Potenzreihen) *Sei*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R . Dann ist

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) dz = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1},$$

wobei die Potenzreihe rechts einen Konvergenzradius $\geq R$ besitzt.

Satz 110. (Partielle Integration) Seien f, g differenzierbare Funktionen und sei

$$\int f'(z) g(z) dz$$

eine Stammfunktion von $f' g$. Dann ist

$$\int f(z) g'(z) dz = f(z) g(z) - \int f'(z) g(z) dz$$

eine Stammfunktion von $f g'$.

Beweis. Nach der Produktregel ist:

$$\left(f(z)g(z) - \int f'(z)g(z) dz \right)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z) - f'(z)g(z) = f(z)g'(z).$$

□

Beispiel. Mit partieller Integration ist

$$\begin{aligned}\int \log(z) dz &= \int \underbrace{\log(z)}_f \times \underbrace{1}_{g'} dz = z \log(z) - \int \underbrace{\left(\frac{1}{z}\right)}_{f'} \times \underbrace{z}_g dz \\ &= z \log(z) - \int 1 dz \\ &= z \log(z) - z\end{aligned}$$

(%i27) integrate (log(z),z)

(%o27) z log(z) - z

(%i28)

Bemerkung: Im Prinzip wären bei derartigen Rechnungen Definitions- und Gültigkeitsbereiche sorgfältig zu klären. Aus Zeitgründen müssen wir auf diese Diskussionen verzichten. Wir nehmen stets genügende Definiertheit, Stetigkeit und Ableitbarkeit an.

Satz 111. (Substitutionsmethode) Seien f, g differenzierbare Funktionen und sei F eine Stammfunktion von f . Dann ist

$$\int f(g(z)) g'(z) dz = F(g(z))$$

eine Stammfunktion von $(f \circ g) g'$.

Beweis. Nach der *Kettenregel* ist

$$(F(g(z)))' = F'(g(z)) g'(z) = f(g(z)) g'(z).$$

□

Beispiel. Für $\cos(z) > 0$ und $f(w) = \frac{1}{w}$, $F(w) = \log(w)$, $g(z) = \cos(z)$ und $g'(z) = -\sin(z)$ ist

$$\begin{aligned} \int \tan(z) dz &= - \int \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{f \circ g} \underbrace{(-\sin(z))}_{g'} dz \\ &= -F(g(z)) = -\log(\cos(z)) = \log\left(\frac{1}{\cos(z)}\right) = \log(\sec(z)) \end{aligned}$$

(%i28) integrate (tan(z),z)

(%o28) log(sec(z))

(%i29)

Partialbruchzerlegungen

Integrale rationaler Funktionen $\frac{p(z)}{q(z)}$ mit Polynomen p, q kann man mit Hilfe von Bruchrechnung für Polynome erhalten. Polynomdivision ergibt

$$\frac{p(z)}{q(z)} = a(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$$

mit $\text{grad}(r) < \text{grad}(q) = n$. Wir nehmen an, dass das Polynom $q(z)$ über \mathbb{R} in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfalle:

$$q(z) = c(z - a_1) \dots (z - a_n), \quad c \neq 0, \quad i \neq j \rightarrow a_i \neq a_j.$$

Die Polynome

$$\frac{q(z)}{z - a_1}, \dots, \frac{q(z)}{z - a_n}$$

sind im n -dimensionalen \mathbb{R} -Vektorraum der Polynome s vom $\text{grad}(s) < n$ linear unabhängig und daher eine Basis.

Das Polynom r lässt sich als Linearkombination dieser Basis schreiben, d.h. es gibt $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{R}$ mit

$$r(z) = A_1 \frac{q(z)}{z - a_1} + A_2 \frac{q(z)}{z - a_2} + \dots + A_n \frac{q(z)}{z - a_n}$$

und

$$\frac{r(z)}{q(z)} = \frac{A_1}{z - a_1} + \dots + \frac{A_n}{z - a_n}$$

Damit ist für $z \neq a_1, \dots, a_n$

$$\begin{aligned} \int \frac{p(z)}{q(z)} dz &= \int a(z) dz + \int \frac{r(z)}{q(z)} dz \\ &= \int a(z) dz + \int \frac{A_1}{z - a_1} dz + \dots + \int \frac{A_n}{z - a_n} dz \\ &= \int a(z) + A_1 \log |z - a_1| + \dots + A_n \log |z - a_n|. \end{aligned}$$

Beispiel. Das Polynom $z^3 - z$ hat die Nullstellen $-1, 0, +1$ und

$$z^3 - z = (z + 1) z (z - 1).$$

Damit ist, für $z \neq -1, 0, 1$,

$$1 = \frac{1}{2} z (z - 1) - 1(z + 1)(z - 1) + \frac{1}{2} (z + 1) z$$

$$\frac{1}{z^3 - z} = \frac{1}{2} \frac{1}{z + 1} - 1 \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{1}{z - 1}$$

$$\int \frac{1}{z^3 - z} dz = \frac{1}{2} \log |z + 1| - \log |z| + \frac{1}{2} \log |z - 1| = \frac{1}{2} \log \left| \frac{z^2 - 1}{z^2} \right|.$$

Weitere Differentialgleichungen

Satz 112. Sei $a: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstellen. Sei A eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{a}$. Angenommen A ist bijektiv. Dann ist die Umkehrfunktion $f = A^{-1}$ eine Lösung der DGL

$$y' = a(y).$$

Ein **Anfangswertproblem** besteht aus einer DGL mit einer zusätzlichen Bedingung an den Wert einer Lösung zu einem bestimmten (Anfangs-)Argument.

Das Anfangswertproblem

$$y' = a(y), y(t_0) = y_0$$

wird durch $f_0(t) = A^{-1}(t + A(y_0) - t_0)$ gelöst.

Beweis.

$$f'(t) = (A^{-1})'(t) = \frac{1}{A'(A^{-1}(t))} = \frac{1}{\frac{1}{a(A^{-1}(t))}} = a(A^{-1}(t)) = a(f(t)).$$

$$\begin{aligned} f_0'(t) &= (A^{-1})'(t + A(y_0) - t_0) = \frac{1}{A'(A^{-1}(t + A(y_0) - t_0))} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a(A^{-1}(t + A(y_0) - t_0))}} \\ &= a(A^{-1}(t + A(y_0) - t_0)) = a(f_0(t)). \end{aligned}$$

$$f_0(t_0) = A^{-1}(t_0 + A(y_0) - t_0) = A^{-1}(A(y_0)) = y_0.$$

□

Beispiel. Betrachte die DGL $y' = y^2$ mit $a(u) = u^2$. Die Stammfunktionen von $\frac{1}{u^2}$ sind die Funktionen

$$A_c = \frac{-1}{u} + c$$

für Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Wegen

$$t = -\frac{1}{u} + c \leftrightarrow \frac{1}{u} = -t + c \leftrightarrow u = \frac{1}{-t + c}$$

ist die Umkehrfunktion $A_c^{-1}(t) = \frac{1}{-t+c}$. $f_c = A_c^{-1}$ löst die DGL:

$$f'_c(t) = \left(\frac{1}{-t+c} \right)' = \frac{-(-1)}{(-t+c)^2} = \frac{1}{(-t+c)^2} = f_c(t)^2.$$

Mit $c_0 = t_0 + \frac{1}{y_0}$ wird zusätzlich die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ erfüllt:

$$f_{c_0}(t_0) = \frac{1}{-t_0 + t_0 + \frac{1}{y_0}} = \frac{1}{\frac{1}{y_0}} = y_0$$

Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Satz 113. Sei $a: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstellen. Sei A eine Stammfunktion der Funktion $\frac{1}{a}$, und sei B eine Stammfunktion von b . A besitze eine Umkehrfunktion A^{-1} . Dann ist $f = A^{-1} \circ B$ eine Lösung der DGL

$$y' = a(y) \cdot b(t).$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = a(y) \cdot b(t), y(t_0) = y_0$$

wird durch $f_0(t) = A^{-1}(B(t) + A(y_0) - B(t_0))$ gelöst.

Beweis.

$$\begin{aligned} f'(t) &= (A^{-1} \circ B)'(t) = \frac{1}{A'(A^{-1}(B(t)))} \cdot B'(t) \\ &= \frac{1}{\frac{1}{a(A^{-1}(B(t)))}} \cdot b(t) \\ &= a(A^{-1}(B(t))) \cdot b(t) \\ &= a(f(t)) \cdot b(t) \end{aligned}$$

Da $B(t_0) + A(y_0) - B(t_0)$ auch eine Stammfunktion von b ist, erfüllt

$$f_0 = A^{-1}(B(t) + A(y_0) - B(t_0))$$

ebenfalls die DGL sowie die Anfangswertbedingung:

$$f_0(t_0) = A^{-1}(B(t_0) + A(y_0) - B(t_0)) = A^{-1}(A(y_0)) = y_0.$$

□

Beispiel. Betrachte die DGL

$$y' = \frac{1 + y^2}{1 + t^2} = (1 + y^2) \cdot \frac{1}{1 + t^2} = a(y) \cdot b(t)$$

mit $a(x) = 1 + x^2$ und $b(t) = \frac{1}{1+t^2}$. $\arctan(x)$ ist Stammfunktion von $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2}$ und $\arctan(t) + C$ ist Stammfunktion von b . \tan ist die Umkehrfunktion von \arctan und damit ist

$$f_C(t) = \tan(\arctan(t) + C)$$

eine Lösung. Mit dem Additionstheorem

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}.$$

ist

$$f_C(t) = \frac{t + \tan(C)}{1 - t \tan(C)}$$

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Wir zeigen einige allgemeine Sätze über das Verhalten von Folgen, Funktionen und Ableitungen, mit denen wir Stammfunktionen und Lösungsmengen von Differentialgleichungen detaillierter studieren können. Zunächst ein offensichtlicher Hilfssatz:

Satz 114. *Für $x \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ sei*

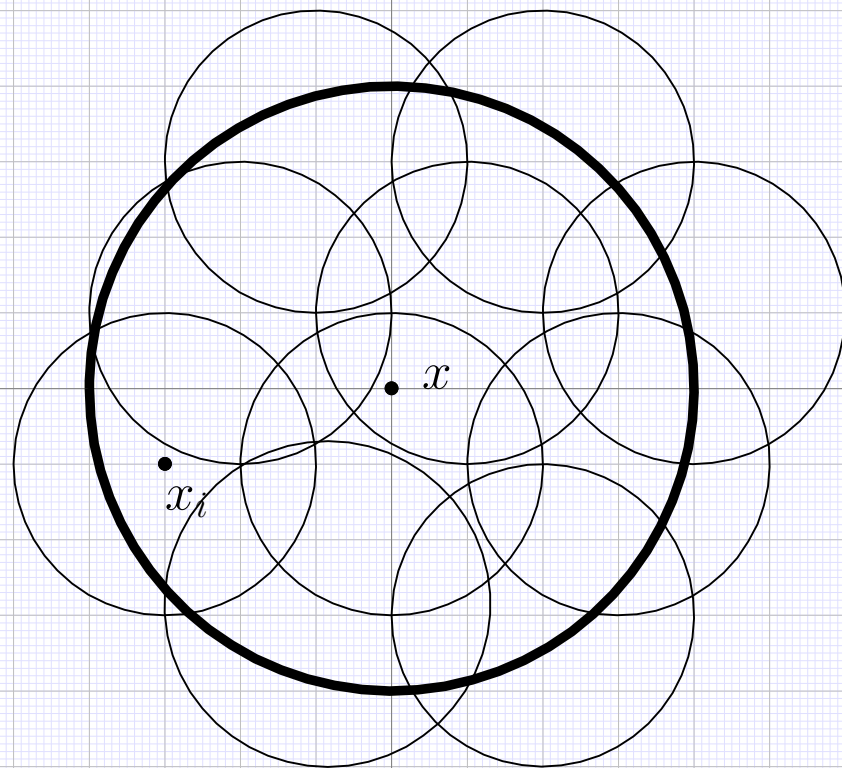
$$U_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{C} \mid |y - x| < \varepsilon\}$$

die ε -Umgebung von x . Weiter sei $\delta > 0$. Dann gibt es endlich viele Punkte

$$x_1, x_1, \dots, x_m,$$

so dass

$$U_\varepsilon(x) \subseteq U_\delta(x_1) \cup U_\delta(x_2) \cup \dots \cup U_\delta(x_m).$$



Definition 115. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge und $n_0 < n_1 < \dots$ eine streng monotone Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ eine **Teilfolge** von (a_n) .

Satz 116. (Bolzano-Weierstraß) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine **beschränkte** Folge komplexer Zahlen, d.h. es gibt eine Zahl M , so dass $|a_n| < M$. Dann besitzt (a_n) eine konvergierende Teilfolge.

Beweis. Definiere die Folge (n_k) durch Rekursion über k , so dass jeweils

$$A_k = \{n \mid n > n_k, a_n \in U_{M2^{-k+1}}(a_{n_k})\}$$

unendlich ist.

Setze $n_0 = 0$. Dann ist A_0 unendlich, denn für alle $n \in \mathbb{N}$: $|a_n - a_0| \leq |a_n| + |a_0| < M + M = 2M$.

Sei n_k definiert. Nach dem vorangehenden Satz gibt es Punkte x_1, \dots, x_m so dass

$$U_{M2^{-k+1}}(a_{n_k}) \subseteq U_{M2^{-k-1}}(x_1) \cup \dots \cup U_{M2^{-k-1}}(x_m).$$

Da die unendliche Menge A_k auf die endlich vielen Umgebungen $U_{M2^{-k-1}}(x_i)$ „verteilt“ wird, gibt es ein i , so dass

$$A = \{n \in A_k \mid a_n \in U_{M2^{-k-1}}(x_i)\}$$

unendlich ist. Wähle $n_{k+1} > n_k$ mit $n_{k+1} \in A_k$ und $a_{n_{k+1}} \in U_{M2^{-k-1}}(x_i)$. Wenn $n \in A$, dann ist $|a_n - a_{n_{k+1}}| \leq |a_n - x_i| + |x_i - a_{n_{k+1}}| < M2^{-k-1} + M2^{-k-1} = M2^{-k}$. Also ist

$$A_{k+1} = \{n \mid n > n_{k+1}, a_n \in U_{M2^{-k}}(a_{n_{k+1}})\} \supseteq \{n \mid n > n_{k+1}\} \cap A$$

unendlich.

Da $n_{k+1} \in A_k$, ist $|a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| < M2^{-k+1}$. Also ist (a_{n_k}) eine konvergierende Cauchy-Folge. \square

Maxima und Minima stetiger Funktionen

Satz 117. *Sei X eine Teilmenge von \mathbb{R} .*

a) *Sei X nichtleer und nach oben beschränkt, d.h. es existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $x < M$ für alle $x \in X$. Dann besitzt X ein eindeutig bestimmtes **Supremum** $\sup(X)$ mit den Eigenschaften*

– $x \leq \sup(X)$ für alle $x \in X$

– für alle $z < \sup(X)$ gibt es ein $x \in X$ mit $x > z$

b) *Wenn X nichtleer aber nicht nach oben beschränkt ist, so setze*

$$\sup(X) = \infty$$

c) *Weiter setze $\sup(\emptyset) = -\infty$*

Beweis. Die Existenz von $\sup(X)$ im Fall a kann durch eine Intervallschachtelung bewiesen werden. □

Durch Vertauschen von $<$ und $>$ ergibt sich:

Satz 118. *Sei X eine Teilmenge von \mathbb{R} .*

a) *Sei X nichtleer und **nach unten beschränkt**, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{R}$, so dass $m < x$ für alle $x \in X$. Dann besitzt X ein eindeutig bestimmtes **Infimum** $\inf(X)$ mit den Eigenschaften*

$$- \quad x \geq \inf(X) \text{ für alle } x \in X$$

$$- \quad \text{für alle } z > \inf(X) \text{ gibt es ein } x \in X \text{ mit } x < z$$

b) *Wenn X nichtleer aber nicht nach unten beschränkt ist, so setze*

$$\inf(X) = -\infty$$

c) *Weiter setze $\inf(\emptyset) = \infty$*

Satz 119. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $x_{\max} \in [a, b]$, so dass $f(x_{\max})$ das **Maximum** von f auf $[a, b]$ ist, d.h. $f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in [a, b]$. Entsprechend gibt es ein $x_{\min} \in [a, b]$, so dass $f(x_{\min})$ das **Minimum** von f auf $[a, b]$ ist, d.h. $f(x) \geq f(x_{\min})$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Sei $X = \{f(x) | x \in [a, b]\} \subseteq \mathbb{R}$. X ist nichtleer.

(1) X ist nach oben beschränkt.

Beweis. Angenommen nicht. Dann wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > n$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergierende Teilfolge (x_{n_i}) . Sei $x = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \in [a, b]$. Da f stetig ist, ist

$$f(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}).$$

Aber der Limes der rechten Seite existiert nicht, da die $f(x_{n_i})$ unbeschränkt in \mathbb{R} sind. *qed*(1)

Nach (1) und dem Satz über das Supremum existiert $\sup(X)$ und $\sup(X) \in \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) > \sup(X) - \frac{1}{n+1}$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine konvergierende Teilfolge (x_{n_i}) . Sei

$$x_{\max} = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{n_i} \in [a, b].$$

Da f stetig ist, ist

$$f(x_{\max}) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{n_i}) = \sup(X).$$

Dann ist $f(x) \leq f(x_{\max})$ für alle $x \in [a, b]$. □

Maxima, Minima und Ableitungen

Satz 120. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in x mit $a < x < b$ ein lokales Maximum hat, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$|y - x| < \delta, y \in [a, b] \rightarrow f(y) \leq f(x).$$

Dann „verschwindet“ die Ableitung an der Stelle x , d.h. $f'(x) = 0$.

Beweis. Für y mit $x < y < x + \delta, y \in [a, b]$ ist $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$.

Also ist $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq 0$.

Für y mit $x - \delta < y < x, y \in [a, b]$ ist $\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$.

Also ist $f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0$.

Zusammen ist $f'(x) = 0$. □

Genauso folgt:

Satz 121. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, die in x mit $a < x < b$ ein **lokales Minimum** hat, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass

$$|y - x| < \delta, y \in [a, b] \rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Dann „verschwindet“ die Ableitung an der Stelle x , d.h. $f'(x) = 0$.

Satz 122. (Mittelwertsatz der Differentialrechnung) Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $a < b$. Dann gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Betrachte die differenzierbare Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) - f(a).$$

Dann ist $g(a) = g(b) = 0$. Wenn g auf $[a, b]$ konstant 0 ist, so gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $g'(x_0) = 0' = 0$. Ansonsten gibt es ein x_0 mit $a < x_0 < b$, so dass an der Stelle x_0 ein Maximum oder Minimum von g vorliegt. Nach dem Satz über lokale „Extrema“ ist $g'(x_0) = 0$. In jedem Fall ist $g'(x_0) = 0$ und

$$f'(x_0) = g'(x_0) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x_0 - a)' = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad \square$$

Satz 123. Sei $H: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so dass $H'(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $H(x) = C$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis. Angenommen, es gibt $c, d \in [a, b]$, so dass $c < d$ und $H(c) \neq H(d)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein $x_0 \in [c, d]$ mit

$$H'(x_0) = \frac{H(d) - H(c)}{d - c} \neq 0 = H'(x_0).$$

Widerspruch. □

Satz 124. Seien $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$, so dass

$$F(x) = G(x) + C.$$

Beweis. Sei $H = F - G$. Dann ist $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. Nach dem vorangehenden Satz ist $H(x)$ konstant gleich einem $C \in \mathbb{R}$. Also ist $F(x) = G(x) + C$. □

Lineare Differentialgleichungen

Definition 125. *Eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung hat die Gestalt*

$$f'(t) = a(t) f(t) + b(t).$$

Die DGL ist homogen, falls konstant $b(t) = 0$ ist. Ansonsten ist die DGL inhomogen.

Die DGL heißt *linear*, weil für stetiges a die Zuordnung

$$D: f \mapsto f' - a \cdot f$$

eine *lineare* Abbildung eines Vektorraums stetig differenzierbarer Funktionen in einen Vektorraum stetiger Funktionen ist:

$$D(\lambda f + \mu g) = (\lambda f' + \mu g') - a (\lambda f + \mu g) = \lambda (f' - a f) + \mu (g' - a g) = \lambda D(f) + \mu D(g).$$

Die DGL ist dann eine „lineare“ Gleichung

$$D(f) = b.$$

In Analogie zu gewöhnlichen endlich-dimensionalen Gleichungssystemen kann dies als unendlich-dimensionales (inhomogenes) Gleichungssystem aufgefasst werden.

Die Lösungsmenge $L_0 = \{f \mid D(f) = 0\}$ der *homogenen* DGL ist ein Untervektorraum in einem Raum stetiger Funktionen. Wenn f_0 eine Lösung der *inhomogenen* DGL $D(f) = b$ ist, so ist die Lösungsmenge der inhomogenen DGL

$$L = \{f \mid D(f) = b\} = f_0 + L_0 = \{f_0 + f \mid f \in L_0\}$$

Der homogene Fall war bereits betrachtet worden: wenn $A'(t) = a(t)$, so ist

$$C e^{A(t)}$$

für jedes $C \in \mathbb{C}$ eine Lösung von $f'(t) = a(t) f(t)$. Im Falle eines reellen Definitionsintervalls entspricht dies genau der Lösungsmenge:

Satz 126. *Sei $a: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit Stammfunktion A . Dann ist*

$$L_0 = \{f: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \mid f'(t) = a(t) f(t)\} = \{C e^{A(t)}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \mid C \in \mathbb{C}\}.$$

Beweis. Sei $f: [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Lösung von $f'(t) = a(t) f(t)$. Wir untersuchen den Quotienten $Q(t) = \frac{f(t)}{e^{A(t)}}$ zweier Lösungen. Q ist eine differenzierbare Funktion und

$$\begin{aligned} Q'(t) &= (f(t) e^{-A(t)})' = f'(t) e^{-A(t)} - f(t) a(t) e^{-A(t)} \\ &= a(t) f(t) e^{-A(t)} - f(t) a(t) e^{-A(t)} = 0. \end{aligned}$$

Dann ist $Q'(t) = 0$ für eine Konstante $C \in \mathbb{C}$ und $f(t) = C e^{A(t)}$. □

Eine Lösung des inhomogenen Falls ergibt sich, indem die Konstante C „variiert“ wird (Methode der „Variation der Konstanten“).

Satz 127. *Betrachte die inhomogene lineare Differentialgleichung*

$$f'(t) = a(t) f(t) + b(t),$$

wobei die Funktionen a und b auf einem Intervall $[c, d] \subseteq \mathbb{R}$ definiert sind. Es sei A eine Stammfunktion von a auf $[c, d]$, und es sei C eine Stammfunktion von $b(t) e^{-A(t)}$ auf $[c, d]$. Für jede Konstante K ist dann

$$(C(t) + K) e^{A(t)}$$

eine Lösung der Differentialgleichung. Weiter ist

$$\{f: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \mid f'(t) = a(t) f(t) + b(t)\} = \{(C(t) + K) e^{A(t)}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \mid K \in \mathbb{C}\}.$$

Beweis. $f_0 = C(t) e^{A(t)}$ ist eine Lösung:

$$\begin{aligned}(C(t) e^{A(t)})' &= C'(t) e^{A(t)} + C(t) A'(t) e^{A(t)} \\ &= b(t) e^{-A(t)} e^{A(t)} + C(t) a(t) e^{A(t)} \\ &= a(t) (C(t) e^{A(t)}) + b(t) = a(t) f(t) + b(t)\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der inhomogenen linearen DGL ist von der Gestalt $f_0 + L_0$, wobei $L_0 = \{C e^{A(t)}: [c, d] \rightarrow \mathbb{C} \mid C \in \mathbb{C}\}$ der zugehörigen homogenen Gleichung ist. □

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Betrachte die homogene Differentialgleichung

$$f''(t) + p f'(t) + q f(t) = 0,$$

für Funktionen $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, mit $p, q \in \mathbb{C}$. Der Ansatz

$$f(t) = e^{\lambda t}$$

führt auf

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + p \lambda e^{\lambda t} + q e^{\lambda t} = 0$$

und die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 + p \lambda + q = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{\pm} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Satz 128. Sei $\lambda_+ \neq \lambda_-$. Dann sind $e^{\lambda_+ t}$ und $e^{\lambda_- t}$ linear unabhängige Lösungen der DGL, und die Lösungsmenge der DGL $f''(t) + p f'(t) + q f(t) = 0$ ist der von $e^{\lambda_+ t}$ und $e^{\lambda_- t}$ erzeugte Unterraum

$$\{\alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{C}\}.$$

Beweis. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und

$$\alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t} = 0.$$

Angenommen $\alpha \neq 0$. Dann ist $e^{\lambda_+ t} + \frac{\beta}{\alpha} e^{\lambda_- t} = 0$, $\frac{\beta}{\alpha} e^{\lambda_- t} = -e^{\lambda_+ t}$ und $-\frac{\beta}{\alpha} e^{(\lambda_- - \lambda_+)t} = 1$. Dann aber ist $e^{(\lambda_- - \lambda_+)t}$ auf \mathbb{R} konstant, was nur mit $\lambda_- = \lambda_+$ möglich ist. Widerspruch. Also ist $\alpha = 0$, und entsprechend $\beta = 0$.

$e^{\lambda_+ t}$ und $e^{\lambda_- t}$ sind Lösungen der DGL und damit jede Linearkombination

$$\alpha e^{\lambda_+ t} + \beta e^{\lambda_- t}.$$

Umgekehrt sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ (mindestens) zweifach differenzierbar und

$$f''(t) + p f'(t) + q f(t) = 0.$$

Mit

$$g(t) = f'(t) - \lambda_+ f(t)$$

gilt

$$\begin{aligned} g'(t) - \lambda_- g(t) &= f''(t) - \lambda_+ f'(t) - \lambda_- f'(t) + \lambda_- \lambda_+ f(t) \\ &= f''(t) + p f'(t) + q f(t) = 0. \end{aligned}$$

Dabei beachte man, dass

$$\begin{aligned} -\lambda_+ - \lambda_- &= \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = p \\ \lambda_+ \times \lambda_- &= \left(\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right) \\ &= \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = q \end{aligned}$$

Damit ist g eine Lösung der homogenen linearen DGL *erster Ordnung*

$$g'(t) = \lambda_- g(t)$$

mit der Lösungsmenge $\{C e^{\lambda_- t} | C \in \mathbb{C}\}$. D.h. $g = C e^{\lambda_- t}$ für ein $C \in \mathbb{C}$.

Weiter ist f eine Lösung der inhomogenen linearen DGL *erster Ordnung*

$$f'(t) = \lambda_+ f(t) + C e^{\lambda_- t}$$

mit der Lösungsmenge $\{(D(t) + K) e^{\lambda_+ t} : [c, d] \rightarrow \mathbb{C} | K \in \mathbb{C}\}$, wobei $D(t)$ eine Stammfunktion von $C e^{\lambda_- t} e^{-\lambda_+ t} = C e^{(\lambda_- - \lambda_+)t}$ ist, z.B. $D(t) = \frac{C}{\lambda_- - \lambda_+} e^{(\lambda_- - \lambda_+)t}$.
Dann liegt

$$f(t) = \left(\frac{C}{\lambda_- - \lambda_+} e^{(\lambda_- - \lambda_+)t} + K \right) e^{\lambda_+ t} = \frac{C}{\lambda_- - \lambda_+} e^{\lambda_- t} + K e^{\lambda_+ t}$$

in dem von $e^{\lambda_+ t}$ und $e^{\lambda_- t}$ erzeugten Unterraum. □

Beispiel. Die Schwingungsgleichung eines Federpendels mit Masse m und Federkonstante D :

$$s(t) = -\frac{m}{D} \cdot s''(t)$$

wird zu

$$s''(t) + \frac{D}{m} s(t) = 0$$

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{-\frac{D}{m}}$$

mit komplexen Lösungen

$$e^{i\sqrt{\frac{D}{m}}t} = \cos \sqrt{\frac{D}{m}}t + i \sin \sqrt{\frac{D}{m}}t \quad \text{und} \quad e^{-i\sqrt{\frac{D}{m}}t} = \cos \sqrt{\frac{D}{m}}t - i \sin \sqrt{\frac{D}{m}}t.$$

Physikalisch mögliche, reelle Lösungen erhält man als Linearkombinationen, z.B.

$$\cos \sqrt{\frac{D}{m}}t \quad \text{und} \quad \sin \sqrt{\frac{D}{m}}t$$

Satz 129. Sei nun $\lambda = \lambda_+ = \lambda_-$ die einzige Lösung der quadratischen Gleichung $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Dann sind $e^{\lambda t}$ und $t e^{\lambda t}$ linear unabhängige Lösungen der DGL $f''(t) + p f'(t) + q f(t) = 0$.

Beweis. $e^{\lambda t}$ und $t e^{\lambda t}$ sind linear unabhängig, weil $e^{\lambda \cdot 0} = 1$ und $0 \cdot e^{\lambda \cdot 0} = 0$. $f(t) = t e^{\lambda t}$ löst die DGL: $f'(t) = e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}$, $f''(t) = \lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t}$. Damit ist

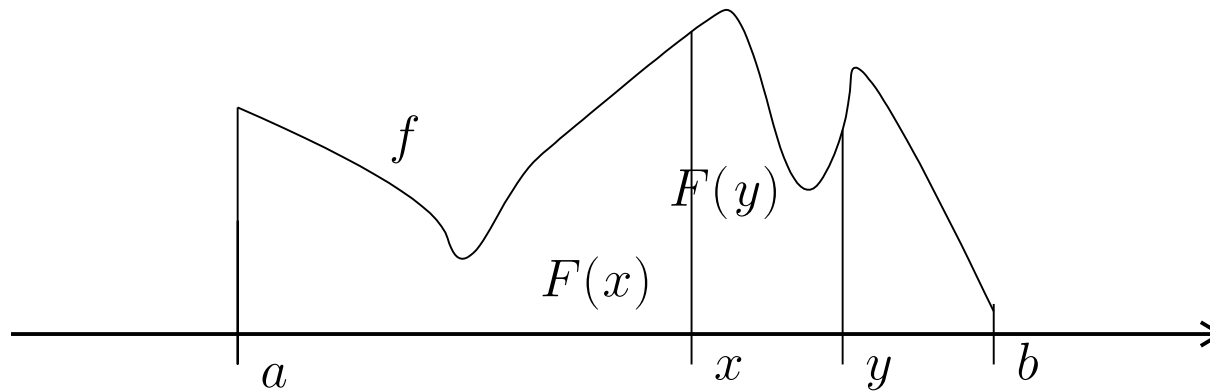
$$\begin{aligned} f''(t) + p f'(t) + q f(t) &= \lambda e^{\lambda t} + \lambda e^{\lambda t} + \lambda^2 t e^{\lambda t} + p(e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}) + q t e^{\lambda t} \\ &= (2\lambda + p) e^{\lambda t} + (\lambda^2 + p\lambda + q) t e^{\lambda t} \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

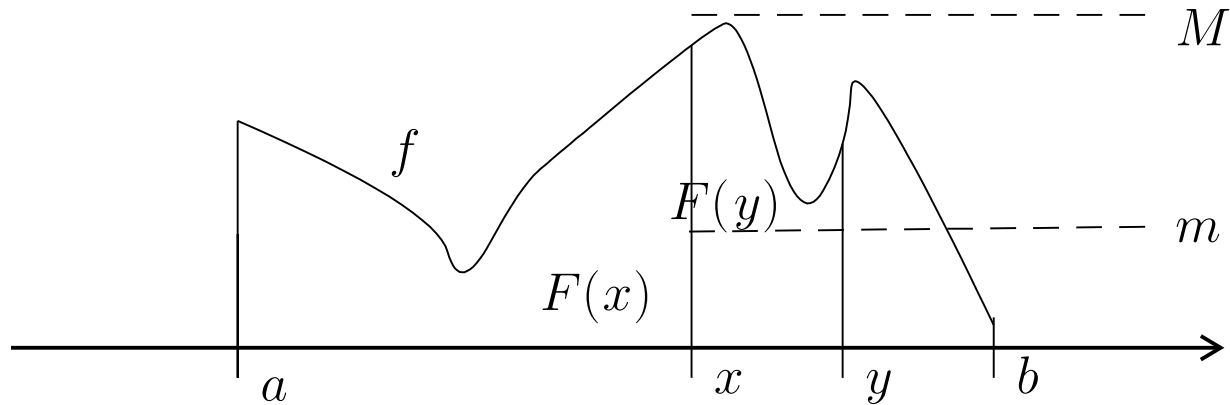
Beachte dabei, dass $2\lambda + p = \lambda_+ + \lambda_- + p = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} + p = 0$. □

Integrale und Flächeninhalte

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ beschreibe Flächeninhalte unter dem Graphen von f : für $x \in [a, b]$ sei $F(x)$ der Inhalt der Fläche A , die zwischen x -Achse, den senkrechten Geraden $u = a$ und $u = x$ und dem Graphen von f eingeschlossen wird:

$$A = \{(u, v) \mid a \leq u \leq x, \text{ und } 0 \leq v \leq f(u) \text{ oder } f(u) \leq v \leq 0\}$$





Die Flächeninhaltsfunktion F ist eine *Inhaltsfunktion*: es gilt offensichtlich:

(*) wenn $a \leq x < y \leq b$, und wenn für alle $\xi \in [x, y]$ $m \leq f(\xi) \leq M$ gilt, so ist

$$(y - x) m \leq F(y) - F(x) \leq (y - x) M$$

Definition 130. Eine Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **Inhaltsfunktion** für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F und f die Eigenschaft (*) erfüllen.

Division durch $y - x$ liefert eine Abschätzung des Differenzenquotienten

$$m \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq M$$

Für stetige Funktionen f können m und M beliebig nahe an $f(x)$ gewählt werden. Das führt zu einer Version des **zweiten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung**.

Satz 131. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine Inhaltsfunktion für f . Dann ist $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und $F' = f$.

Beweis. Sei oBdA $a < x < b$. Wir zeigen, dass $F'(x) = f(x)$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass $a < x - \delta < x + \delta < b$ und

$$x - \delta < y < x + \delta, y \neq x \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Dann ist auch $|y - x| (f(x) - \varepsilon) < |F(y) - F(x)| < |y - x| (f(x) + \varepsilon)$,

$$f(x) - \varepsilon < \frac{F(y) - F(x)}{y - x} < f(x) + \varepsilon \text{ und } \left| \frac{F(y) - F(x)}{y - x} - f(x) \right| < \varepsilon. \quad \square$$

Satz 132. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit Stammfunktion $\int f dx = F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Für $a \leq c \leq d \leq b$ definiere das **bestimmte Integral**

$$\int_c^d f dx = [F]_c^d = F(d) - F(c).$$

Dann ist $\int_c^d f dx$ der Flächeninhalt (mit Vorzeichen) unter dem Graphen von f auf dem Intervall $[c, d]$.

Da eine Stammfunktion von f auf dem Intervall $[a, b]$ bis auf eine additive Konstante bestimmt ist, ist $\int_c^d f dx$ wohldefiniert.

Beispiel. Der Flächeninhalt des Halbkreises mit Radius r ist

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} &= \left[\frac{x}{2} \sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} \arcsin\left(\frac{x}{r}\right) \right]_{-r}^r \\ &= \frac{r^2}{2} \arcsin(1) - \frac{r^2}{2} \arcsin(-1) = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{r^2}{2} \pi \end{aligned}$$

Damit ist der Flächeninhalt des Kreises mit Radius r zu πr^2 bestimmt.

Sei F eine Inhaltsfunktion für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Das Integral $\int_a^b f(x) dx$ lässt sich mit Hilfe von *Treppenfunktionen* abschätzen.

Definition 133. Eine Funktion $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine **Treppenfunktion**, falls es eine **Zerlegung** $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ des Intervalls $[a, b]$ und $t_0, \dots, t_{n-1} \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$a_i \leq x < a_{i+1} \rightarrow T(x) = t_i \text{ und } T(b) = t_{n-1}.$$

Definiere die **Riemannsche Summe** von T als

$$\int_a^b T(x) dx = \sum_{i=0}^{n-1} T(a_i) (a_{i+1} - a_i) = \sum_{i=0}^{n-1} t_i (a_{i+1} - a_i).$$

Definition 134. Für Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiere $f \leq g$, wenn für alle $x \in [a, b]$ $f(x) \leq g(x)$ gilt.

Aus der Definition einer Inhaltsfunktion ergibt sich sofort:

Satz 135. Sei $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Inhaltsfunktion für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn $T_0, T_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit

$$T_0 \leq f \leq T_1$$

sind, so ist

$$\int_a^b T_0 dx \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f dx \leq \int_a^b T_1 dx .$$

Definition 136. Für $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei das obere Integral

$$\int_a^b {}^* f dx = \inf \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } f \leq T \right\}$$

und das untere Integral

$$\int_a^b {}_* f dx = \sup \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } T \leq f \right\}.$$

Dies suggeriert die Definition $\int_a^b f dx = \int_a^b * f dx = \int_a^b * f dx$, zumindest für „gutmütige“ Funktionen f . Bevor wir zeigen können, dass stetige Funktionen gutmütig sind, benötigen wir einen wichtigen Hilfssatz.

Satz 137. *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Intervall $[a, b]$ mit reellen Endpunkten a und b . Dann ist f **gleichmäßig stetig**, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass*

$$x, y \in [a, b] \text{ und } |x - y| < \delta \text{ impliziert } |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Beachte, dass im Gegensatz zur gewöhnlichen Definition der Stetigkeit δ hier nicht von der Stelle x abhängig ist.

Beweis. Angenommen, es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $n = 1, 2, \dots$ Punkte $x_n, y_n \in [a, b]$ gibt mit

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ und } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat (x_n) eine konvergierende Teilfolge, und wir können oBdA annehmen, dass (x_n) konvergiert. Sei

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in [a, b].$$

Wegen $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ konvergiert auch (y_n) mit $x = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Wegen der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = f(x) - f(x) = 0.$$

Aber wegen $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ existiert $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - f(y_n))$ nicht, Widerspruch. \square

Satz 138. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:

a) $\int_a^b {}_* f dx$ und $\int_a^b {}^* f dx$ existieren;

b) $\int_a^b {}_* f dx \leq \int_a^b {}^* f dx$;

c) $\int_a^b {}_* f dx = \int_a^b {}^* f dx$.

Definition 139. Sei f eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Wir sagen, dass das **Riemann-Integral**

$$\int_a^b f dx$$

existiert, falls $\int_a^b * f dx$ und $\int_a^b {}^* f dx$ existieren, und falls $\int_a^b * f dx = \int_a^b {}^* f dx$.
In diesem Fall setze

$$\int_a^b f dx = \int_a^b {}^* f dx.$$

$\int_a^b f dx$ heißt auch das **bestimmte Integral** von $f(x)$ von a bis b .

Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist **Riemann-integrierbar**, wenn das Riemann-Integral $\int_c^d f dx$ für alle c, d mit $a \leq c \leq d \leq b$ existiert.

Satz 140. Jede stetige reelle Funktion ist Riemann-integrierbar.

Beweis. a) Es genügt zu zeigen, dass

$$X_* = \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } T \leq f \right\}$$

eine nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{R} ist.

Da f stetig auf $[a, b]$ ist, gibt es $m, M \in \mathbb{R}$, so dass

$$x \in [a, b] \rightarrow m \leq f(x) \leq M.$$

Dann ist $T_0: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $T_0(x) = m$ eine Treppenfunktion mit $T_0 \leq f$, und

$$\int_a^b T_0 dx = m(b-a) \in X_*.$$

Andererseits gilt für jede Treppenfunktion $T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T \leq f$, dass $T(x) \leq f(x) \leq M$ und

$$\int_a^b T dx \leq M(b-a).$$

b) Sei

$$X^* = \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } f \leq T \right\}.$$

Es genügt zu zeigen, dass für alle $z_* \in X_*$ und alle $z^* \in X^*$ gilt, dass $z_* \leq z^*$.

Sei $T_*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $T_* \leq f$, und sei $T^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion mit $f \leq T^*$. Dann ist $T_* \leq T^*$ und

$$\int_a^b T_* dx \leq \int_a^b T^* dx.$$

c) Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt zu zeigen, dass es Treppenfunktionen $T_*, T^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T_* \leq f \leq T^*$ gibt, so dass

$$\left| \int_a^b T^* dx - \int_a^b T_* dx \right| \leq \varepsilon.$$

Auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit von f wähle ein $\delta > 0$, so dass

$$x, y \in [a, b] \text{ und } |x - y| < \delta \text{ impliziert } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Wähle eine Zerlegung $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n = b$ des Intervalls $[a, b]$, so dass

$$a_{i+1} - a_i < \delta.$$

Sei $m_i = \min \{ f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}] \}$ und $M_i = \max \{ f(x) \mid x \in [a_i, a_{i+1}] \}$, und definiere Treppenfunktionen $T_*, T^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$a_i \leq x < a_{i+1} \rightarrow T_*(x) = m_i, T^*(x) = M_i, T_*(b) = m_{n-1} \text{ und } T^*(b) = M_{n-1}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b T^* dx - \int_a^b T_* dx \right| &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} M_i (a_{i+1} - a_i) - \sum_{i=0}^{n-1} m_i (a_{i+1} - a_i) \right| \\ &= \left| \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) (a_{i+1} - a_i) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a} (a_{i+1} - a_i) \right| = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 141. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Definiere $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi.$$

Dann ist F eine Inhaltsfunktion für f .

Beweis. Betrachte x, y, m, M , so dass $a \leq x < y \leq b$, und so dass $m \leq f(\xi) \leq M$ für alle $\xi \in [x, y]$. Es ist zu zeigen, dass

$$(y - x) m \leq F(y) - F(x) \leq (y - x) M,$$

bzw. dass

$$F(x) + (y - x) m \leq F(y) \leq F(x) + (y - x) M.$$

Wir zeigen die linke Ungleichung, die rechte kann analog gezeigt werden.

Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Definition von $F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$ gibt es eine Treppenfunktion $T_*: [a, x] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $T_* \leq f|_{[a,x]}$ und

$$\int_a^x f(\xi) d\xi - \varepsilon < \int_a^x T_* d\xi.$$

„Erweitere“ T_* zu der Treppenfunktion $T_{**}: [a, y] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$T_{**}(\xi) = \begin{cases} T_*(\xi), & \text{falls } a \leq \xi < x; \\ m, & \text{falls } x \leq \xi \leq y. \end{cases}$$

Dann ist $T_{**} \leq f|_{[a,y]}$ und

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_a^y f(\xi) d\xi \geq \int_a^y T_{**} d\xi = \int_a^x T_* d\xi + (y-x)m \\ &> \int_a^x f(\xi) d\xi + (y-x)m - \varepsilon = F(x) + (y-x)m - \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, muss $F(x) + (y-x)m \leq F(y)$ sein. □

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 142. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi$$

wohldefiniert und eine Stammfunktion von f .

Beweis. F ist eine Inhaltsfunktion und daher eine Stammfunktion. □

Diese Stammfunktion ist auf dem Intervall $[a, b]$ eindeutig festgelegt durch den offensichtlichen Wert

$$\int_a^a f(\xi) d\xi = 0.$$

Auch das schon vorher definierte bestimmte Intervall für Funktionen mit Stammfunktionen erfüllt diese Bedingungen. Daher stimmen die bisher eingeführten bestimmten Integrale miteinander überein.

Satz 143.

- a) *Das bestimmte Integral definiert eine lineare Abbildung vom Raum der stetigen Funktionen auf $[a, b]$ in den Raum der differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$:*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx .$$

- b) *Das bestimmte Integral ist auch in der Integrationsrichtung additiv:*

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx .$$

- c) *Das bestimmte Integral ist monoton: wenn $f \leq g$, dann ist*

$$\int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx .$$

Beweis. a) Die Ableitungen beider Seiten der Gleichung nach der Variablen b ergeben die Funktion $\alpha f + \beta g$. Wegen der Eindeutigkeit der Stammfunktion bis auf eine Konstante ist dann für alle b

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx + C.$$

Für $b = a$ verschwinden die Integrale. Daher ist $C = 0$.

b) Die Ableitungen beider Seiten der Gleichung nach der Variablen c ergeben die Funktion f . Wegen der Eindeutigkeit der Stammfunktion bis auf eine Konstante ist dann für alle c

$$\int_a^c f dx = \int_a^b f dx + \int_b^c f dx + C.$$

Für $c = b$ ergibt sich, dass $C = 0$ ist.

c) Da Infima von kleineren Mengen gleich bleiben oder größer werden, ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f dx &= \inf \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } f \leq T \right\} \\ &\leq \inf \left\{ \int_a^b T(x) dx \mid T: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist eine Treppenfunktion und } g \leq T \right\} \\ &= \int_a^b g dx \end{aligned}$$

□

Satz 144. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.
Dann gibt es ein $z \in [a, b]$ mit*

$$\int_a^b f dx = f(z) (b - a).$$

Beweis. Sei m das Minimum von f auf $[a, b]$, und sei M das Maximum von f auf $[a, b]$. Dann ist $m \leq f(x) \leq M$ für $x \in [a, b]$ und nach Satz 143 c) ist

$$m(b-a) = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f dx \leq \int_a^b M dx = M(b-a).$$

Also gibt es ein w , $m \leq w \leq M$, so dass

$$\int_a^b f dx = w(b-a).$$

Nach dem Zwischenwertsatz 76 für die stetige Funktion f gibt es ein $z \in [a, b]$ mit $f(z) = w$. Dann ist

$$\int_a^b f dx = f(z)(b-a).$$

□

Konvergenz von Taylor-Reihen

Satz 145. (Taylor-Formel) Sei f $(k + 1)$ -fach stetig differenzierbar auf einem Intervall $[a, b]$ mit $0, x \in [a, b]$. Dann ist (Integralform des Restglieds)

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{k!} \int_0^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi.$$

Mit dem Mittelwertsatz 144 gibt es weiterhin ein ξ_0 , so dass $\xi_0 \in [0, x]$ falls $0 \leq x$ oder $\xi_0 \in [x, 0]$ falls $x \leq 0$, und so dass (Cauchysches Restglied)

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi_0)}{k!} (x - \xi_0)^k x.$$

Das k -te Taylor-Polynom ist das Polynom

$$\sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Beweis. Durch vollständige Induktion über $k \in \mathbb{N}$. Für $k = 0$ ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(\xi) d\xi \\ &= \sum_{i=0}^0 \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{0!} \int_0^x f^{(1)}(\xi) (x - \xi)^0 d\xi. \end{aligned}$$

Der Schritt von k auf $k + 1$ ergibt sich durch partielle Integration der Integralglieds:

$$\begin{aligned} &\int f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi \\ &= -\frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} + \frac{1}{k+1} \int f^{(k+2)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} d\xi \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k!} \int_0^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi \\ = & \frac{1}{k!} \left[-\frac{1}{k+1} f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} + \frac{1}{k+1} \int f^{(k+2)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} d\xi \right]_0^x \\ = & \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0) x^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x f^{(k+2)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} d\xi \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich die $(k+1)$ -ste Taylor-Formel als

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(0) x^{k+1} + \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x f^{(k+2)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} d\xi \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i + \frac{1}{(k+1)!} \int_0^x f^{(k+2)}(\xi) (x - \xi)^{k+1} d\xi \end{aligned}$$

□

Satz 146. Sei f beliebig oft stetig differenzierbar auf einem Intervall $[a, b]$ mit $0, x \in [a, b]$. Wenn das Restglied gegen 0 konvergiert,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k!} \int_0^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi = 0,$$

so konvergiert die Taylor-Reihe gegen $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i.$$

Dies ist z.B. der Fall, wenn es eine Konstante C gibt, so dass

$$\xi \in [a, b] \text{ und } k \in \mathbb{N} \text{ impliziert } f^{(k)}(\xi) < C.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k!} \int_0^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi \right| &\leq \frac{1}{k!} \left| \int_0^x C |x|^k d\xi \right| \\ &= \frac{C |x|^{k+1}}{k!}. \end{aligned}$$

□

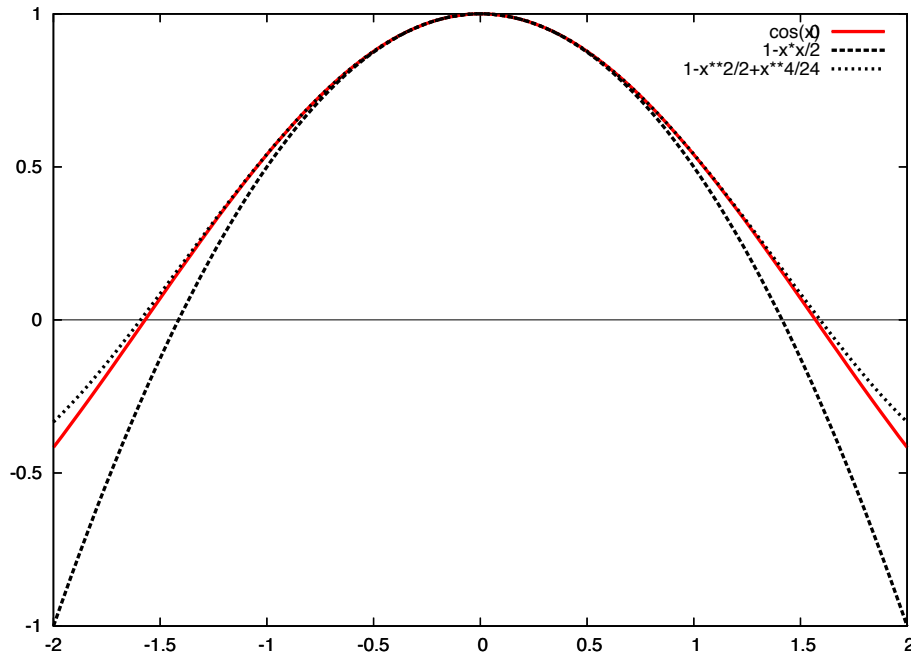
Die Taylor-Entwicklung von $\cos(x)$ um den Punkt 0 lautet:

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \dots$$

```

GNUplot] set xrange [-2:2]; set yrange [-1:1]; plot 0; plot cos(x) with lines lc rgb "red"
        lw 5, 1-x*x/2 with lines lt 2 lw 5, 1-x**2/2+x**4/24 with lines lt 3 lw 5;

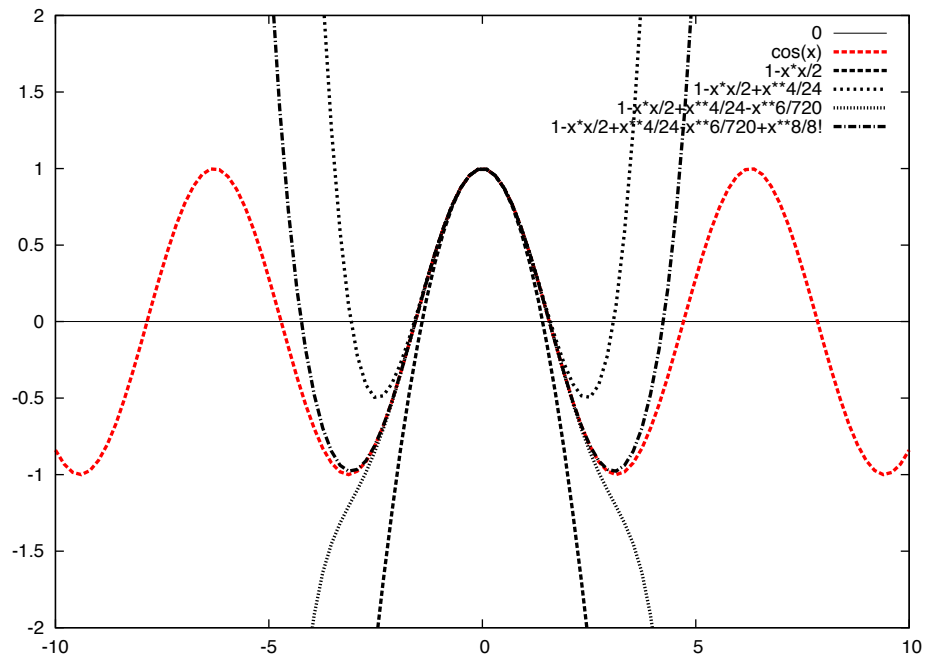
```



```

GNUplot] set xrange [-10:10]; set yrange [-2:2]; plot 0, cos(x) with lines lc rgb "red"
        lw 5, 1-x*x/2 with lines lt 2 lw 5, 1-x*x/2+x**4/24 with lines lt 3 lw 5, 1-
        x*x/2+x**4/24-x**6/720 with lines lt 4 lw 5, 1-x*x/2+x**4/24-x**6/720+x**8/8! with
        lines lt 5 lw 5

```



GNUplot]

Für $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ kann liefert das 4. (= das 5.) Taylor-Polynom

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

bereits eine gute Approximation mit Restgliedabschätzung:

$$\left| \frac{f^{(6)}(\xi_0)}{6!} (x - \xi_0)^6 x \right| \leq \frac{1}{6!} \left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \leq \frac{0,18}{720} = 0,00025$$

Für den Bereich $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ kann man die Taylor-Reihe um den Punkt $\frac{\pi}{2}$ entwickeln:

Satz 147. (Taylor-Formel) Sei f $(k + 1)$ -fach differenzierbar auf dem Intervall $[a, b]$ mit $x_0, x \in [a, b]$. Dann ist

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi.$$

Beweis. Definiere $g(y) = f(y + x_0)$. Dann ist $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = g(x - x_0)$. $g(y)$ ist $(k + 1)$ -fach differenzierbar auf dem Intervall $[a - x_0, b - x_0]$ mit $g^{(i)}(y) = f^{(i)}(y + x_0)$. $0 = x_0 - x_0 \in [a - x_0, b - x_0]$. Die Taylor-Formel für g liefert:

$$g(y) = \sum_{i=0}^k \frac{g^{(i)}(0)}{i!} y^i + \frac{1}{k!} \int_0^y g^{(k+1)}(\zeta) (y - \zeta)^k d\zeta.$$

Für $y = x - x_0$ ergibt sich mit der Variablen-Substitution $\xi = \zeta + x_0$, $d\xi = d\zeta$

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x - x_0) \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{1}{k!} \int_0^{x-x_0} f^{(k+1)}(\zeta + x_0) (x - x_0 - \zeta)^k d\zeta \\ &= \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i + \frac{1}{k!} \int_{x_0}^x f^{(k+1)}(\xi) (x - \xi)^k d\xi \end{aligned}$$

□

Taylor-Entwicklung von $\cos(x)$ um $\frac{\pi}{2}$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \cos''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\cos'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \cos''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \dots\dots$$

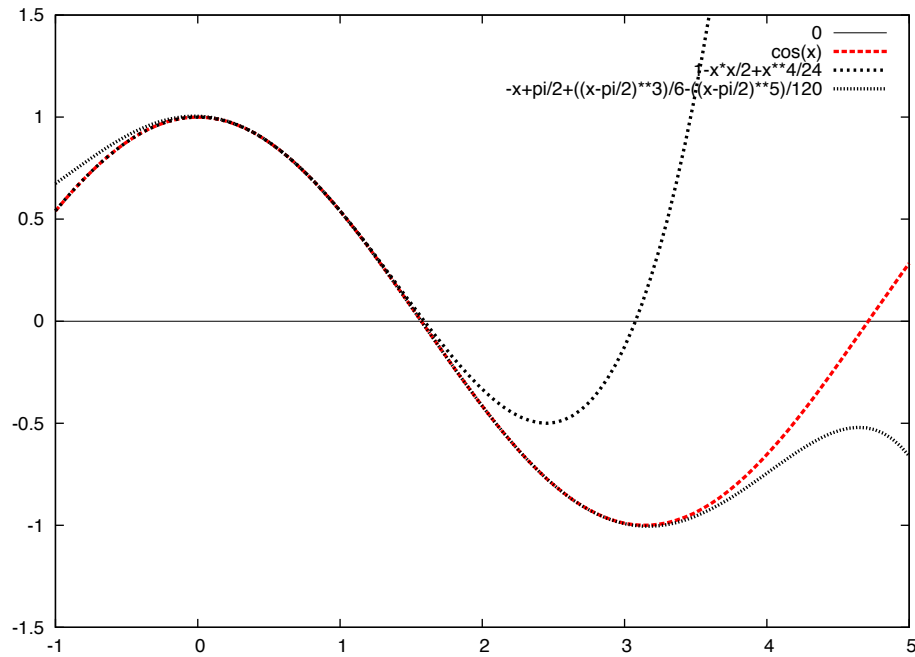
$$\cos(x) = \sum_{i=0}^k \frac{\cos^{(i)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{i!} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^i = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$\frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5 + \dots$$

```

GNUplot] set xrange [-1:5]; set yrange [-1.5:1.5]; plot 0, cos(x) with lines lc rgb
"red" lw 5, 1-x*x/2+x**4/24 with lines lt 3 lw 5, -x+pi/2+((x-pi/2)**3)/6-((x-
pi/2)**5)/120 with lines lt 4 lw 5

```



GNUplot]

Numerische Berechnung von $\cos(z)$ mit einem absoluten Fehler $< 0,001$:

Die Cosinus-Funktion hat die Periode 2π : wähle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in [-\pi, +\pi]$ mit

$$z = 2\pi n + x, \cos(z) = \cos(x)$$

Fall 1: $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Setze $\cos(z) = \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$.

Fall 2: $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. Setze $\cos(z) = \cos(x) = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{5!}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5$

Fall 3: $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Wegen der Punkt-Symmetrie der Cosinus-Funktion bzgl. des Punktes $(\frac{\pi}{2}, 0)$ berechne $\cos(z) = \cos(x) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ mit Hilfe der Fälle 1 und 2.

Fall 4: $x \in [-\pi, 0]$. Wegen der Spiegel-Symmetrie der Cosinus-Funktion bzgl. der y -Achse berechne $\cos(z) = \cos(x) = \cos(-x)$ mit Hilfe der Fälle 1, 2 und 3.

Berechnung des (natürlichen) Logarithmus

Für $|x| < 1$ konvergiert die geometrische Reihe absolut und

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$$

Formales Integrieren auf beiden Seiten liefert

$$\log(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} + C.$$

Der Fall $x = 0$ impliziert, dass $C = 0$. Für $|x| \leq \frac{1}{2}$ konvergiert die Reihe gut:

$$\begin{aligned} \left| \log(1+x) - \sum_{i=0}^k (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} \right| &= \left| \sum_{i=k+1}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} \right| \\ &\leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |x|^{i+1} = |x|^{k+2} \frac{1}{1-|x|} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{k+1} \end{aligned}$$

Für beliebiges $y > 0$ kann man $\log(y)$ folgendermaßen berechnen:

Wähle $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in [1, 2)$ mit $y = 2^n x$.

Setze $z = \frac{x-1}{x+1}$. Dann ist $0 \leq z < \frac{1}{2}$ und $\frac{1+z}{1-z} = \frac{1 + \frac{x-1}{x+1}}{1 - \frac{x-1}{x+1}} = \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$.

Zusammen ist

$$\log(y) = n \log(2) + \log(x) = n \log(2) + \log(1+z) - \log(1-z),$$

wobei die rechte Seite gut mit Hilfe der Taylor-Entwicklung berechnet werden kann.

Grenzwerte von Funktionenfolgen

Definition 148. Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$. Eine Funktion $g: A \rightarrow \mathbb{C}$ ist der **punktweise Limes** der Folge (f_n) , wenn

$$x \in A \rightarrow g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Ein punktweiser Limes einer Folge stetiger oder sogar differenzierbarer Funktionen ist im Allgemeinen nicht stetig: definiere $f_n: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ durch

$$f_n(x) = \cos^{2n}(x).$$

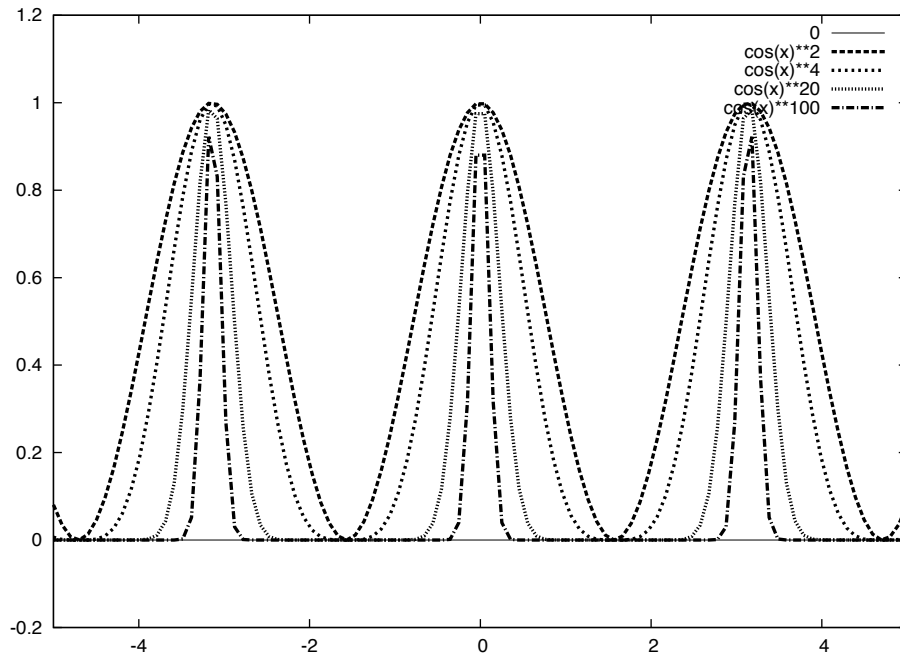
Dann ist

$$\cos^2(x) = 1 \leftrightarrow \cos(x) = \pm 1 \leftrightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

```
GNUplot] set xrange [-5:5]; set yrange [-0.2:1.2]; plot 0, cos(x)**2 with lines lw 5,  
cos(x)**4 with lines lw 5, cos(x)**20 with lines lw 5, cos(x)**100 with lines lw 5
```



```
GNUplot]
```

Definition 149. Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ **konvergiert gleichmäßig** gegen eine Funktion $g: A \rightarrow \mathbb{C}$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$x \in A, m \geq n \rightarrow |g(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

D.h., dass die ε, n -Abschätzung „gleichmäßig“ für alle $x \in A$ gilt. Die Funktion g ist dann auch der punktweise Limes der Folge (f_n) .

Bei gleichmäßiger Konvergenz übertragen sich verschiedene Eigenschaften der f_n auf den (punktweisen) Limes.

Satz 150. Die Folge (f_n) von stetigen Funktionen $f_n: A \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiere gleichmäßig gegen die Funktion $g: A \rightarrow \mathbb{C}$. Dann ist g stetig.

Beweis. Sei $x_0 \in A$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$x \in A, m \geq n \rightarrow |g(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Da f_n (an der Stelle x_0) stetig ist, wähle $\delta > 0$, so dass

$$|x - x_0| < \delta, x \in A \rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Dann ist für $|x - x_0| < \delta, x \in A$:

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x_0)| &= |g(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - g(x_0)| \\ &\leq |g(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Die gleichmäßige Konvergenz kann mit Hilfe einer *Norm* erfasst werden:

Definition 151. Für eine Menge K und eine Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ definiere die **(Supremums-)Norm**

$$\|f\|_K = \sup \{|f(x)| \mid x \in K\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Die Funktion f heißt **beschränkt** auf K , wenn $\|f\|_K < \infty$.

Satz 152. $\|f\|_K$ ist eine Norm auf dem \mathbb{C} -Vektorraum der beschränkten Funktionen auf K :

- a) $\|f\|_K \geq 0$;
- b) $\|f\|_K = 0$ genau dann, wenn $f = 0$, $f(x) = 0$ für alle $x \in K$;
- c) $\|\lambda f\|_K = |\lambda| \|f\|_K$;
- d) (Dreiecksungleichung) $\|f + g\|_K \leq \|f\|_K + \|g\|_K$.

Beweis. *d)*

$$\begin{aligned}\|f + g\|_K &= \sup \{|f(x) + g(x)| \mid x \in K\} \\ &\leq \sup \{|f(x)| + |g(x)| \mid x \in K\} \\ &\leq \sup \{|f(x)| \mid x \in K\} + \sup \{|g(x)| \mid x \in K\} \\ &= \|f\|_K + \|g\|_K\end{aligned}$$

□

Satz 153. *Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f: K \rightarrow \mathbb{C}$, wenn*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_K = 0.$$

Beweis. Angenommen, (f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f . Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$m \geq n \text{ und } x \in K \rightarrow |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist für $m \geq n$

$$\|f - f_m\|_K = \sup \{|f(x) - f_m(x)| \mid x \in K\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Umgekehrt sei

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_K = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|f - f_m\|_K < \varepsilon$ für $m \geq n$. Dann ist für $m \geq n$ und $x \in K$

$$|f(x) - f_m(x)| \leq \sup \{|f(x) - f_m(x)| \mid x \in K\} = \|f - f_m\|_K < \varepsilon. \quad \square$$

Satz 154. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ und sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$, die eine **Cauchy-Folge** bezüglich der Supremums-Norm bilden: für alle $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_K < \varepsilon.$$

Dann konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{C}$. Das heißt, dass der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf K zusammen mit der Supremums-Norm **vollständig** ist.

Beweis. Für $x \in K$ ist

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_K.$$

Daher ist $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge, die einen Limes in \mathbb{C} besitzt. Definiere $f: K \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Es genügt zu zeigen, dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$ und $x \in K$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m, n \geq n_0$

$$\|f_n - f_m\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist für alle $m, n \geq n_0$

$$\|f_n(x) - f_m(x)\|_K < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $m \geq n_0$ und unter Benutzung eines genügend großen n ist

$$\|f(x) - f_m(x)\|_K \leq \|f(x) - f_n(x)\|_K + \|f_n(x) - f_m(x)\|_K < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Der Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen auf K zusammen mit der Supremums-Norm ist *nicht vollständig*:

die **Fourier-Reihe**

$$\cos(x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + \frac{1}{25} \cos(5x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}$$

konvergiert auf $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig gegen die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4}x, & \text{falls } x \geq 0 \\ \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{4}x, & \text{falls } x \leq 0 \end{cases}$$

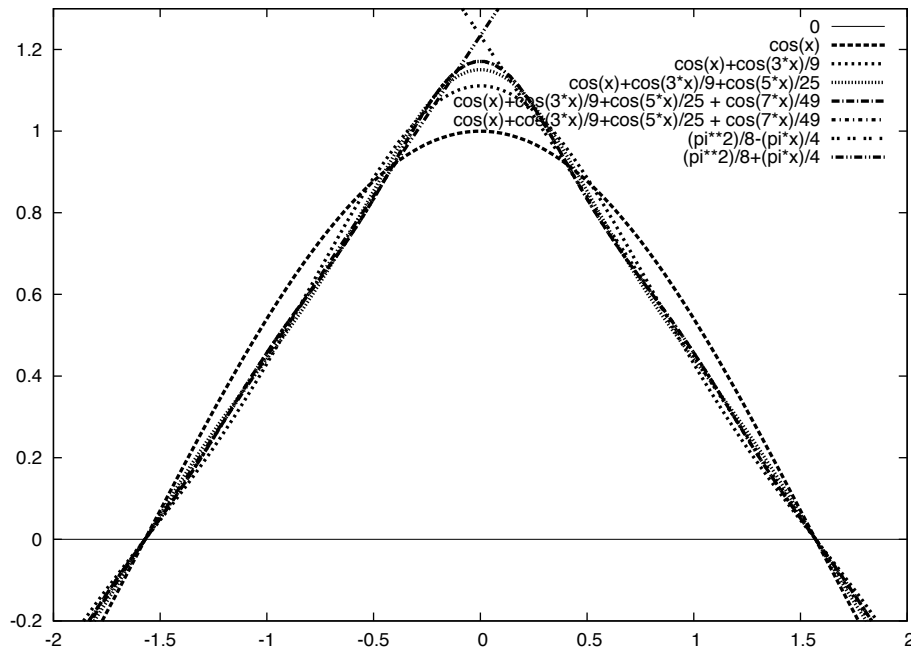
die in $x=0$ nicht differenzierbar ist.

(es gilt $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$)

```

GNUplot] set xrange [-2:2]; set yrange [-0.2:1.3]; plot 0, cos(x) with lines lw
5, cos(x)+cos(3*x)/9 with lines lw 5, cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25 with
lines lw 5,cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25 + cos(7*x)/49 with lines lw 5,
cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25 + cos(7*x)/49 with lines lw 5, (pi**2)/8-(pi*x)/4
with lines lw 5, (pi**2)/8+(pi*x)/4 with lines lw 5

```



```

GNUplot]

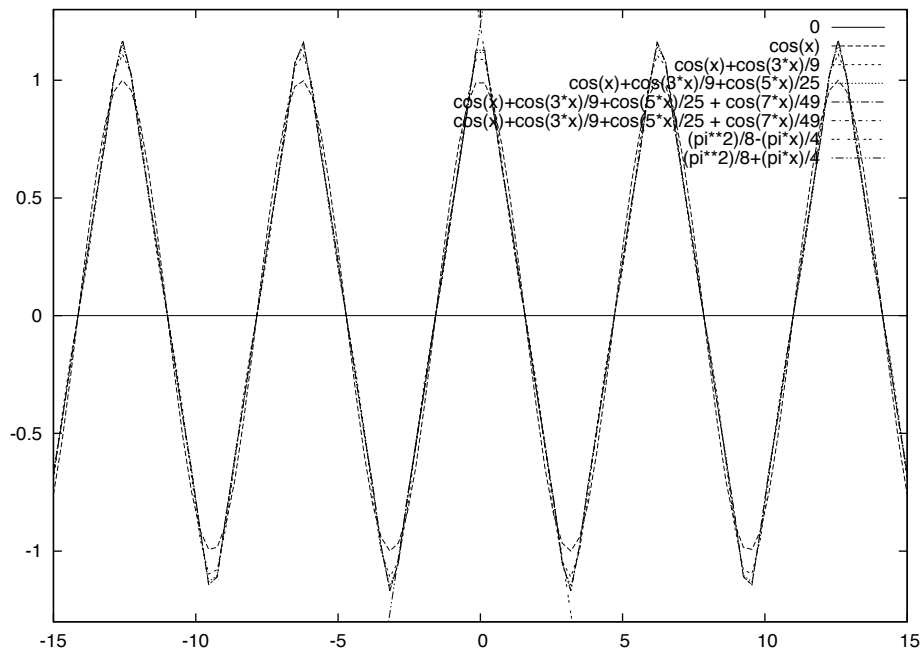
```

Da $\cos((2n + 1)x)$ periodisch mit Periode 2π ist, liefert die Fourier-Reihe eine Dreiecksschwingung mit der Periode 2π . Akustisch klingt die Dreiecksschwingung fast wie eine (Co-)Sinusschwingung, weil die Obertöne vergleichsweise schwach sind.

```

GNUplot] set xrange [-15:15]; set yrange [-1.3:1.3]; plot 0, cos(x), cos(x)+cos(3*x)/9,
cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25, cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25+cos(7*x)/49,
cos(x)+cos(3*x)/9+cos(5*x)/25+cos(7*x)/49, (pi**2)/8-(pi*x)/4, (pi**2)/8+(pi*x)/4

```



Satz 155. (Konvergenzkriterium von Weierstraß) Sei (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n: K \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K < \infty,$$

d.h., dass die Reihe konvergiert. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

absolut für alle $x \in K$, und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert gleichmäßig. D.h., dass die Funktionenfolge $(\sum_{n=0}^m f_n(x))_{m \in \mathbb{N}}$ der Teilsummen gleichmäßig gegen die Funktion $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert.

Beweis. Sei $x \in K$. $\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_K$ ist eine Majorante der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.
Nach dem Majorantenkriterium konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ absolut.

Für $x \in K$ definiere $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{C}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Wähle ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_K < \varepsilon.$$

Sei $m \geq N$ und $x \in K$. Dann ist

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^m f_n(x) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} f_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} |f_n(x)| \leq \sum_{n=N}^{\infty} \|f_n\|_K < \varepsilon \quad \square$$

Satz 156. $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z_0^i$ konvergiere für ein $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Sei $0 < r < |z_0|$. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ gleichmäßig auf der Kreisscheibe $\{z \mid |z| < r\}$.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{i=0}^{\infty} a_i z_0^i$ konvergiert, gibt es eine obere Schranke $M \in \mathbb{R}$ für die Glieder $a_i z_0^i$ der Folge:

$$|a_i z_0^i| < M.$$

Setze $R = |z_0|$ und $K = \{z \mid |z| < r\}$. Dann gilt für $z \in K$

$$|a_i z^i| = |a_i z_0^i \frac{z^i}{z_0^i}| = |a_i z_0^i| \left| \frac{z^i}{z_0^i} \right| < M \left(\frac{r}{R} \right)^i.$$

Daher ist

$$\|a_i z^i\|_K \leq M \left(\frac{r}{R} \right)^i.$$

Dann ist

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|a_i z^i\|_K \leq \sum_{i=0}^{\infty} M \left(\frac{r}{R} \right)^i < \infty,$$

nach Satz 55 für geometrische Reihen. Nach dem Konvergenzkriterium von Weierstraß gilt die gleichmäßige Konvergenz. \square

Satz 157. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ zu einer stetigen Funktion.

Beweis. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergiert für $x \in [0, 1)$ nach Satz 73. Also ist

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

auf $[0, 1]$ wohldefiniert.

Wegen $c_n x^n = (c_{m+1} + \dots + c_n) x^n - (c_{m+1} + \dots + c_{n-1}) x^n$ ist:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=m+1}^l c_n x^n &= \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_n) x^n - \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_{n-1}) x^n \\
 &= \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_n) x^n - \sum_{n=m}^{l-1} (c_{m+1} + \dots + c_n) x^{n+1} \\
 &= \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_n) x^n - \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_n) x^{n+1} + \\
 &\quad (c_{m+1} + \dots + c_l) x^{l+1} \\
 &= \sum_{n=m+1}^l (c_{m+1} + \dots + c_n) (x^n - x^{n+1}) + (c_{m+1} + \dots + c_l) x^{l+1}
 \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$|c_{m+1} + \dots + c_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $n > m > N$. Für $l \rightarrow \infty$ und $x \in [0, 1]$ liefert das die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{n=0}^m c_n x^n \right| &= \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} c_n x^n \right| \\ &\leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} (x^n - x^{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \frac{\varepsilon}{2} (x^{m+1} + 1) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

□

Satz 158.

$$a) \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \log(2).$$

$$b) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \frac{\pi}{4}.$$

Beweis. *a)* Die Taylor-Entwicklung von $\log(1+x)$ um 0 lautet:

$$\log(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{i+1}}{i+1} = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \dots$$

Die Reihe konvergiert für $x=1$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen die stetige Funktion $\log(1+x)$. Dann ist

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots = \log(1+1) = \log(2).$$

b) Nach der Summationsformel für die geometrische Reihe ist für $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \dots$$

Dann ist

$$\arctan(x) = \int \frac{1}{1+x^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \pm \dots + C$$

Wegen $\arctan(0) = 0$ ist $C = 0$. Die Reihe konvergiert für $x = 1$. Daher konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen die stetige Funktion $\arctan(x)$. Dann ist

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

□

Satz 159. Sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Folge (f_n) konvergiere gleichmäßig gegen die (stetige) Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx.$$

Beweis. OBdA. sei $a < b$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ für alle $n > N$. Für $n > N$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b f_n(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (f(x) - f_n(x)) dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \\ &\leq \int_a^b \|f - f_n\|_{[a,b]} dx \\ &= (b-a) \|f - f_n\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Damit können die Integration und die Bildung *gleichmäßiger* Limites auf gewisse Art „vertauscht“ werden.

Spezielle Limite

Definition 160. Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Wir sagen, dass (a_n) gegen ∞ konvergiert oder dass ∞ der **Grenzwert** dieser Folge ist, falls es für alle reellen Zahlen R einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$a_n > R.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

Die Folge (a_n) konvergiert gegen $-\infty$, falls es für alle $R \in \mathbb{R}$ einen Index n_0 gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$a_n < R.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty.$$

Definition 161. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$. Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Definiere:

a) $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = \infty$ gdw. es für alle $R \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$z \in M, z \neq x \text{ und } |z - x| < \delta \text{ impliziert } f(z) > R.$$

b) $\lim_{z \rightarrow x} f(z) = -\infty$ gdw. es für alle $R \in \mathbb{R}$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$z \in M, z \neq x \text{ und } |z - x| < \delta \text{ impliziert } f(z) < R.$$

c) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a$ gdw. es für alle $\varepsilon > 0$ ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$z \in M \text{ und } z > r \text{ impliziert } |f(z) - a| < \varepsilon.$$

d) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ gdw. es für alle $R \in \mathbb{R}$ ein $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$z \in M \text{ und } z > r \text{ impliziert } f(z) > R.$$

e) Analog definiere $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = -\infty$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = a$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = \infty$ und $\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = -\infty$.

Weiterhin existieren *einseitige Limites*, bei denen das Argument einer Funktion von links bzw. von rechts gegen die Grenze läuft.

Definition 162. Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M \subseteq \mathbb{R}$. Seien $x, a \in \mathbb{R}$. Definiere:

a) $\lim_{z \nearrow x} f(z) = a$ gdw. für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$z \in M \text{ und } x - \delta < z < x \text{ impliziert } |f(z) - a| < \varepsilon.$$

b) $\lim_{z \searrow x} f(z) = a$ gdw. für $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$z \in M \text{ und } x < z < x + \delta \text{ impliziert } |f(z) - a| < \varepsilon.$$

Weitere Varianten von Limesoperationen sind denkbar und können durch suggestive Notationen bezeichnet werden.

Uneigentliche Integrale

Es sollen bestimmte Integrale definiert werden, deren Integrationsgrenzen kritisch sind, d.h. die unendlich sind oder an deren Integrationsgrenzen der Integrand undefiniert ist.

Definition 163. Für $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiere das **(uneigentliche) Integral**

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_a^g f(x) dx$$

Die Existenz dieses uneigentlichen Integrals setzt voraus, dass die bestimmten Integrale $\int_a^b f(x) dx$ existieren. Nach den Definitionen unendlicher Limites sind auch die Fälle

$$\int_a^\infty f(x) dx = -\infty \text{ oder } \int_a^\infty f(x) dx = \infty$$

möglich.

Satz 164. Sei $s > 1$. Dann

$$a) \int_1^{\infty} x^{-s} dx = \frac{1}{s-1}$$

$$b) \int_1^{\infty} x^{-1} dx = \infty$$

Beweis.

$$\int_1^{\infty} x^{-s} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_1^g x^{-s} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \left. \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right|_1^g = -\frac{1}{-s+1} = \frac{1}{s-1}.$$

$$\int_1^{\infty} x^{-1} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_1^g x^{-1} dx = \lim_{g \rightarrow \infty} \log(x) \Big|_1^g = \lim_{g \rightarrow \infty} (\log(g) - 1) = \infty. \quad \square$$

Definition 165. Für $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ definiere das **(uneigentliche) Integral**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{g \nearrow b} \int_a^g f(x) dx .$$

Im Fall, dass $f(b) \in \mathbb{R}$ ebenfalls definiert ist, stimmt diese Definition mit der ursprünglichen überein. Interessant ist der Fall, bei dem

$$\lim_{x \nearrow b} f(x) = \pm\infty .$$

Definiere analog für $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiere das **(uneigentliche) Integral**

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{g \searrow a} \int_g^b f(x) dx .$$

Satz 166. Sei $0 < s < 1$. Dann ist $\int_0^1 x^{-s} dx = \frac{1}{1-s}$.

Beweis.

$$\int_0^1 x^{-s} dx = \lim_{g \searrow 0} \int_g^1 x^{-s} dx = \lim_{g \searrow 0} \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \Big|_g^1 = \frac{1}{-s+1} = \frac{1}{1-s}. \quad \square$$

Beidseitig uneigentliche Integrale lassen sich durch Kombinationen erklären, z.B.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^{\infty} f(x) dx.$$

Satz 167. Für $x > 0$ ist das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) := \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

wohldefiniert und eine reelle Zahl. Die Funktion $\Gamma: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die **Gamma-Funktion**.

Beweis. Die Funktion $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ nimmt für $t \geq 0$ nur Werte ≥ 0 an. Wir zerlegen das uneigentliche Integral in zwei Teilintegrale

$$\int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt + \int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Für $x \geq 1$ ist $t^{x-1} e^{-t} \in \mathbb{R}$, und dann ist das *linke Integral* ein „eigentliches“ Integral.

Für $x < 1$ ist t^{x-1} nicht definiert und das linke Integral uneigentlich. Wir schätzen das uneigentliche Integral durch eine majorisierende Funktion ab: Weil $e^{-t} \leq 1$ ist, ist $t^{x-1} e^{-t} \leq t^{x-1}$. Nach Satz 166 gilt für $g \in (0, 1)$

$$\int_g^1 t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_g^1 t^{x-1} dt \leq \lim_{g \searrow 0} \int_g^1 t^{x-1} dt = \int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{1 - (1 - x)} = \frac{1}{x}.$$

Da die linke Seite mit $g \searrow 0$ schwach monoton wächst und durch $\frac{1}{x}$ beschränkt ist, existiert der entsprechende Limes der linken Seite in der Menge \mathbb{R} :

$$\int_0^1 t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{g \searrow 0} \int_g^1 t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathbb{R}.$$

Das *rechte Integral* wird ähnlich behandelt:

$$t^{x+1} e^{-t} = e^{(x+1)\log(t)} e^{-t} = e^{(x+1)\log(t)-t}$$

Dabei ist $\lim_{t \rightarrow \infty} ((x+1)\log(t) - t) = -\infty$ und $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(x+1)\log(t)-t} = 0$. Wähle $t_0 \geq 1$, so dass

$$t > t_0 \rightarrow t^{x+1} e^{-t} < 1 \text{ und } t^{x-1} e^{-t} < \frac{1}{t^2}.$$

Nach Satz 164 gilt für $g > t_0$

$$\int_{t_0}^g t^{x-1} e^{-t} dt \leq \int_{t_0}^g \frac{1}{t^2} dt \leq \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{t_0}^g \frac{1}{t^2} dt = \int_{t_0}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \leq \int_1^{\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1.$$

Da die linke Seite mit $g \rightarrow \infty$ schwach monoton wächst und durch 1 beschränkt ist, existiert der entsprechende Limes der linken Seite in der Menge \mathbb{R} :

$$\int_1^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \lim_{g \rightarrow \infty} \int_1^g t^{x-1} e^{-t} dt = \int_1^{t_0} t^{x-1} e^{-t} dt + \lim_{g \rightarrow \infty} \int_{t_0}^g t^{x-1} e^{-t} dt \in \mathbb{R}.$$

Damit ist das Integral $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ für alle $x > 0$ wohldefiniert. \square

Satz 168. Für alle $x > 0$ gilt die Funktionalgleichung $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$. Weiter gilt $\Gamma(n + 1) = n!$ für alle natürlichen Zahlen n .

Beweis. Die uneigentlichen Integrale \int_0^∞ sind Limes von Integralen \int_ε^R für $\varepsilon \searrow 0$ und $R \rightarrow \infty$. Die linke Seite der folgenden partiellen Integration entspricht $\Gamma(x + 1)$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^R t^x e^{-t} dt &= -t^x e^{-t} \Big|_\varepsilon^R + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t} dt \\ &= -R^x e^{-R} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon} + x \int_\varepsilon^R t^{x-1} e^{-t} dt \end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass $x > 0$ ist, verschwindet $-R^x e^{-R} + \varepsilon^x e^{-\varepsilon}$ beim Grenzübergang $\varepsilon \searrow 0$ und $R \rightarrow \infty$. Also ist

$$\Gamma(x + 1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = x \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = x \Gamma(x).$$

Die zweite Behauptung wird durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.
Für $n = 0$ ist

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t} + e^{-0}) = e^0 = 1 = 1!$$

Der Induktionsschritt ergibt sich sofort aus der obigen Funktionalgleichung:

$$\Gamma(n+2) = (n+1) \Gamma(n+1) = (n+1) n! = (n+1)! \quad \square$$