Mathematik I für Physiker und Physikerinnen

math 140, WS 2011/12

von Peter Koepke und Thoralf Räsch

Analysis (P.K.): Mo, Di 8-10, HS B, Anatomie, Nußallee 10
Lineare Algebra (T.R.): Do 8-10, HS I, PI
Übungen (Philipp Schlicht): Mi Nachmittag, 3std.

Ziele

Vermittlung der mathematischen Grundbegriffe und Methoden; erforderlich für die Vorlesungen nach dem 1. Semester

Inhalte

Lineare Algebra reelle und komplexe Zahlen, elementare Gruppentheorie, Vektorräume, Skalarprodukt, lineare Gleichungssysteme, Matrizen, Determinante, Eigenwerte, Diagonalisierung symmetrischer Matrizen (Hauptachsentransformation), geometrische Interpretation

Analysis Folgen und Reihen, Differentiation und Integration von Funktionen einer Veränderlichen. Gewöhnliche Differentialgleichungen, lineare Differentialgleichungssysteme und deren allgemeine Lösung, einige spezielle Lösungen. Differentiation von Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Literaturhinweis

... O. Forster; Analysis I (Vieweg Wiesbaden)...

Kontakt

Prof. Dr. Peter Koepke, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.005, Sprechstunde Dienstags 12:15 - 13:15
koepke@math.uni-bonn.de

Sekretariat: U. Müller-Moewes, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.011, Tel. 0228-73-2947
mmoewes@math.uni-bonn.de

AOR Dr. Thoralf Räsch, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60
raesch@math.uni-bonn.de

Dr. Philipp Schlicht, Mathematisches Institut, Endenicher Allee 60, Raum 4.003
schlicht@math.uni-bonn.de

Homepage

www.math.uni-bonn.de/people/logic/teaching/2011WS/Mathematik_fuer_Physiker.shtml

Übungen

12 Übungsgruppen, 3-stündig, Mittwoch Nachmittag, 13:00-16:00 und 16:00-19:00, Beginn 19.10.2011

Modulprüfung

Klausur, geplant: Donnerstag, 2. Februar. 2012, 8:00-10:00

Nachklausur

Zulassungsvoraussetzung zur Klausur

erfolgreiche Teilnahme an den Übungen, d.h. erfolgreiche Erledigung der wöchentlichen Hausaufgaben und aktive Teilnahme in der Übungsgruppe

Hausaufgaben

Donnerstag auf der Homepage, erstmals 13.10. Abgabe eine Woche später

Anmeldeformalitäten für die Modulprüfungen

siehe https://basis.uni-bonn.de

Einleitung

1. Newtonsches Gesetz: $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

2. Newtonsches Gesetz: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot (\vec{s}\,)''$

3. Newtonsches Gesetz: $\vec{F}_1 = -\,\vec{F}_2$

Hookesches Gesetz (Federgesetz): $\vec{F} = D \cdot \vec{s}$

Elastische Schwingung:

$$D \cdot s(t) = F_{\text{Feder}}(t) = -\,F_{\text{Trägheit}}(t) = -\,m \cdot s''(t) = -\,m \cdot \frac{d^2}{dt^2}\,s(t)$$

$$s(t) = -\,\frac{m}{D} \cdot s''(t)$$

Die *Differentialgleichung* $s'' = -\frac{D}{m}\,s$ wird gelöst durch

$$s(t) = c \cdot \sin(\sqrt{\frac{D}{m}}\,t - \varphi_0)$$

Beweis.

$$s'(t) = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot c \cdot \cos(\sqrt{\frac{m}{D}}\,t - \varphi_0)$$

$$s''(t) = -\sqrt{\frac{m}{D}} \cdot \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot c \cdot \sin(\sqrt{\frac{m}{D}}\,t - \varphi_0) = -\frac{m}{D} \cdot s(t)$$

$\square$

Mathematik ist essentieller Teil der physikalischen Sprache und Methodik

Analysis

- Differential- und Integralrechnung
- Infinitesimalrechnung
- (Calculus)

$$\sin(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \ldots$$

$$\sin'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

Voraussetzungen

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*.

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ ist die Menge der *ganzen Zahlen*.

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} | \, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, p \in \mathbb{Z}\}$ ist die Menge der *rationalen Zahlen*.

$\mathbb{R}$ ist die Menge der *reellen Zahlen*.

$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Auf diesen Mengen sind die algebraischen Operationen

Addition $(x + y)$, Multiplikation $(x \cdot y)$ und Exponentiation (x^y) gegeben.

Weiterhin sind die Relationen $x < y$ und $x \leqslant y$ gegeben.

Die Operationen erfüllen Rechengesetze (Axiome) wie z.B. das Distributivgesetz

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Genauer: für alle x, y, z gilt $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Oder: $\forall x, y, z \colon x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Satz 1. $(-1) \cdot (-1) = 1$ *„minus mal minus ist plus“.*

Beweis.

$$0 = (-1) \cdot 0 = (-1) \cdot ((1 + (-1)) = (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-1)$$

$$0 = -1 + (-1) \cdot (-1)$$

$$1 = (-1) \cdot (-1)$$

$\square$

1. Vollständige Induktion

Das Prinzip (Axiom) der vollständigen Induktion.

Sei $A(n)$ eine Aussage in der Variablen n.

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl.

(Induktionsanfang) Angenommen $A(n_0)$ gilt.

(Induktionsschluss) Angenommen für alle ganzen Zahlen $n \geqslant n_0$ folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$.

***Dann** gilt $A(n)$ für alle ganzen Zahlen $\geqslant n_0$.*

Das Prinzip ist anschaulich klar.

Wenn man $\mathbb{Z}$ mengentheoretisch definiert, lässt sich das Prinzip beweisen.

Beispiel

Satz 2. *Für alle natürlichen Zahlen* $n \geqslant 1$ *gilt*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (\,*\,)$$

Beweis. $(\,*\,)$ ist eine Aussage $A(n)$ in der Variablen n.

Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n_0 = 1$:

$$1^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}\,.$$

Induktionsschluss: Angenommen $n \geqslant n_0$ und $A(n)$ gelte. Dann ist

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)(n+1)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+n+6n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}
\end{aligned}$$

Also gilt $A(n+1)$.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt ($*$) für alle natürlichen Zahlen $n \geqslant 1$. $\square$

Bemerkung

$$\int_0^1 x^2\,dx$$

ist der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden $x = 1$ und der Parabel x^2 gebildet wird. Anschaulich gilt:

$$\frac{1}{n}\left(\left(\frac{0}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right)\leqslant\int_0^1 x^2\,dx\leqslant\frac{1}{n}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

$$\frac{1}{n^3}\big(1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2\big)\leqslant\int_0^1 x^2\,dx\leqslant\frac{1}{n^3}\big(1^2+2^2+\ldots+n^2\big)$$

$$\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\leqslant\int_0^1 x^2\,dx\leqslant\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{n})^3=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)^2(2n-2)}{6}\leqslant\int_0^1 x^2\,dx\leqslant\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n+1)^2(2n+2)}{6}=\frac{1}{3}\cdot(1+\frac{1}{n})^3$$

$$\frac{1}{3}\cdot(1-\frac{1}{n})^3 \leqslant \int_0^1 x^2\,dx \leqslant \frac{1}{3}\cdot(1+\frac{1}{n})^3$$

Da $(1-\frac{1}{n})^3$ und $(1+\frac{1}{n})^3$ von unten und oben „beliebig nah“ gegen 1 gehen, gilt:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

Definition durch Induktion (Rekursion)

Aus dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt

Das Prinzip der rekursiven Definition.

Sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ *eine ganze Zahl.*

(Rekursionsanfang) Sei das (mathematische) Objekt $F(n_0)$ *definiert.*

(Rekursionsregel) Es gibt eine Definition, die für alle ganzen Zahlen $n \geqslant n_0$ $F(n+1)$ *aus* $F(n)$ *definiert.*

Dann *ist* $F(n)$ *für alle ganzen Zahlen* $\geqslant n_0$ *definiert.*

Definition 3. *Definiere die Funktion $n!$ (sprich: n Fakultät) durch Rekursion über n mit Rekursionsanfang*

$$0! = 1$$

und Rekursionsregel

$$(n+1)! = (n+1) \cdot (n!).$$

Anschaulich:

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1)! \\ &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \\ &\vdots \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 0! \\ &= 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \end{aligned}$$

Definition 4. *Für ganze Zahlen a,b definiere die mehrfache Summe*

$$\sum_{i=a}^{b} x_i \,,$$

auch geschrieben $x_a + \ldots + x_b$ durch Rekursion über $b \geqslant a$ mit Rekursionsanfang

$$\sum_{i=a}^{a} x_i = x_a$$

und Rekursionsregel

$$\sum_{i=a}^{a+1} x_i = \left(\sum_{i=a}^{a} x_i\right) + x_{a+1} \,.$$

Für $b < a$ setze weiter $\sum_{i=a}^{b} x_i = 0$.

Damit ist

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Definition 5. *Für ganze Zahlen a, b definiere das mehrfache Produkt*

$$\prod_{i=a}^{b} x_i\,,$$

auch geschrieben $x_a \cdot \ldots \cdot x_b$ durch Rekursion über $b \geqslant a$ mit Rekursionsanfang

$$\prod_{i=a}^{a} x_i = x_a$$

und Rekursionsregel

$$\prod_{i=a}^{a+1} x_i = \left(\prod_{i=a}^{a} x_i\right) \cdot x_{a+1}\,.$$

Für $b < a$ setze weiter $\prod_{i=a}^{b} x_i = 1$.

Damit ist

$$\prod_{i=1}^{n} i = n!$$

Rechenregeln für mehrfache Summen und Produkte

Proposition 6. („Assoziativgesetz“)*Für alle ganzen Zahlen* $a \leqslant b \leqslant c$ *und reelle Zahlen* x_i *gilt*

$$\sum_{i=a}^{c} x_i = \sum_{i=a}^{b} x_i + \sum_{i=b+1}^{c} x_i$$

und

$$\prod_{i=a}^{c} x_i = \prod_{i=a}^{b} x_i \cdot \prod_{i=b+1}^{c} x_i$$

Anschaulich:

$$x_a + \ldots + x_c = (x_a + \ldots + x_b) + (x_{b+1} + \ldots + x_c)$$

und

$$x_a \cdot \ldots \cdot x_c = (x_a \cdot \ldots \cdot x_b) + (x_{b+1} \cdot \ldots \cdot x_c).$$

Proposition 7. („Kommutativgesetz“)*Für alle ganzen Zahlen $a \leqslant b$ und reelle Zahlen x_i, y_i gilt*

$$\sum_{i=a}^{b} (x_i + y_i) = \sum_{i=a}^{b} x_i + \sum_{i=a}^{b} y_i$$

und

$$\prod_{i=a}^{b} (x_i \cdot y_i) = \prod_{i=a}^{b} x_i \cdot \prod_{i=a}^{b} y_i$$

Anschaulich:

$$(x_a + y_a) \ldots + (x_b + y_b) = (x_a + \ldots + x_b) + (y_a + \ldots + y_b)$$

und

$$(x_a \cdot y_a) \cdot \ldots \cdot (x_b \cdot y_b) = (x_a \cdot \ldots \cdot x_b) + (y_a \cdot \ldots \cdot y_b).$$

Proposition 8. („Distributivgesetz“)*Für alle ganzen Zahlen $a \leqslant b$ und reelle Zahlen x_i und λ gilt*

$$\sum_{i=a}^{b} (\lambda x_i) = \lambda \cdot \sum_{i=a}^{b} x_i$$

Anschaulich:

$$(\lambda x_a) \ldots + (\lambda x_b) = \lambda \cdot (x_a + \ldots + x_b).$$

Diese Gesetze kann man auch mit dem Prinzip der vollständigen Induktion zeigen.

Etwas Kombinatorik

Definition 9. *Für natürliche Zahlen n und k definiere den* Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{i} .$$

Proposition 10. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)) \cdot ((n-k) \cdot \ldots \cdot 1)}{(k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1) \cdot ((n-k) \cdot \ldots \cdot 1)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \end{aligned}$$

$\square$

Satz 11. *Sei* $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ *eine Menge mit paarweise verschiedenen Elementen,* $n \geqslant 1$*. Eine* k*-Folge aus* X *ist eine Folge* $(y_1, \ldots, y_k)$ *wobei jedes* y_i *Element von* X *ist. Eine Folge kann auch Wiederholungen* $y_i = y_k$ *haben.*

a) *Es gibt genau* n^k *(verschiedene)* k*-Folgen aus* X*.*

b) *Es gibt genau*

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k) = \prod_{i=1}^{k} (n+1-i)$$

wiederholungsfreie k*-Folgen aus* X*.*

c) *Es gibt genau* $n!$ Permutationen *von* X*, d.h. wiederholungsfreie* n*-Folgen aus* X*.*

d) *Es gibt genau* $\binom{n}{k}$ *Teilmengen von* X *mit genau* k *Elementen.*

Beweis. a) Durch Induktion über $k \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang (*-beginn, -verankerung*): $k = 0$.

Es gibt genau *eine* 0-Folge aus X, nämlich die leere Folge $(\ )$. Da $n^0 = 1$, gilt die Eigenschaft für $k = 0$.

Induktionsschluss (*-schritt*): Sei $k \geqslant 0$ und die Eigenschaft gelte für k. Dann ist

$$F_{k+1} = \{(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}) | (y_1, \dots, y_k) \text{ ist eine } k\text{-Folge aus } X, y \in X\}$$

die Menge der $k+1$-Folgen aus X. Da es nach der Induktionsvoraussetzung n^k k-Folgen aus X gibt, und da X n Elemente hat, hat F_{k+1}

$$n^k \cdot n = n^{k+1}$$

Elemente, womit die Eigenschaft auch für $k+1$ gilt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt a) für alle $k \in \mathbb{N}$.

b) *Induktionsanfang* (*-beginn, -verankerung*): $k=0$.
Es gibt genau *eine* 0-Folge aus X, nämlich die leere Folge ( ). Diese Folge ist wiederholungsfrei. Da $\prod_{i=1}^{0}(n+1-k)=1$, gilt die Eigenschaft für $k=0$.
Induktionsschluss (*-schritt*): Sei $k\geqslant 0$ und die Eigenschaft gelte für k. Dann ist

$F'_{k+1}=\{(y_1,\ldots,y_k,y_{k+1})|y_{k+1}\in X,(y_1\ldots,y_k)$ ist wiederholungsfreie k-Folge aus $X\setminus\{y_{k-1}\}\}$

die Menge der wiederholungsfreien $k+1$-Folgen aus X. Es gibt genau n verschiedene Möglichkeiten für die Wahl von y_{k-1} und nach Induktionsvoraussetzung $(n-1)\cdot\ldots\cdot((n-1)+1-k)=(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)=\prod_{i=1}^{k}(n-i)$ wiederholungsfreie k-Folgen aus $X\setminus\{y_{k-1}\}$. Damit hat F'_{k+1} genau

$$n\cdot[(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)]=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)=\prod_{i=1}^{k+1}(n+1-i)$$

Elemente, d.h., die Eigenschaft gilt für $k+1$. Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gilt die Eigenschaft für alle $k\in\mathbb{N}$.

$c)$ ist ein Spezialfall von $b)$ mit $k = n$. Es gibt genau

$$\prod_{i=1}^{n} (n + 1 - i) = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Permutationen von X.

d) Es gibt genau $\binom{n}{k}$ Teilmengen von X mit genau k Elementen. Sei P die Menge der Teilmengen von X, die genau k Elemente haben, sei $\mathrm{card}(P)$ die Anzahl der Elemente von P (die „Kardinalität“). Sei F' die Menge der wiederholungsfreien k-Folgen aus X. Dann ist

$$F' = \{((y_1, \ldots, y_k)|Y \in P, (y_1 \ldots, y_k) \text{ ist wiederholungsfreie } k\text{-Folge aus } Y\}.$$

Nach c) ist $\mathrm{card}(F') = \mathrm{card}(P) \cdot k!$. Nach b) ist

$$\mathrm{card}(P) = \frac{\mathrm{card}(F')}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n+1-k)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$\square$

Größenordnungen

$0! = 1,\ 1! = 1,\ 2! = 2,\ 3! = 6,\ 4! = 24,\ 5! = 120,\ 6! = 720,\ 7! = 5040,\ \ldots$

$10! \approx 3 \cdot 10^6,\ 20! \approx 2 \cdot 10^{18},\ 100! \approx 10^{158},\ \ldots$

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion n^k, für jedes feste $k \geqslant 1$: wenn $n > 2\,k$, dann

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \ldots \cdot (k+1) \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 \\ &\geqslant (k+1) \cdot (n \cdot 1) \cdot ((n-1) \cdot 2) \cdot ((n-2) \cdot 3) \cdot \ldots \cdot ((n-k+1) \cdot k) \\ &\geqslant (k+1) \cdot \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{k} \\ &> n^k \end{aligned}$$

Die Funktion $n!$ wächst schneller als die Funktion k^n, für jedes feste $k \geqslant 2$: wenn $n > 2k^2$, dann ist $n - \frac{n}{2} > k^2$, $n - k^2 > \frac{n}{2}$ und

$$\begin{aligned} n! &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (k^2+1) \cdot k^2 \cdot \ldots \cdot 1 \\ &> \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (k^2+1)}_{n-k^2} \\ &\geqslant \underbrace{k^2 \cdot \ldots \cdot k^2}_{> \frac{n}{2}} \\ &> k^n \end{aligned}$$

Andererseits ist für alle $n \geqslant 2$:

$$n^n = \underbrace{n \cdot \ldots \cdot n}_{n} > n \cdot \ldots \cdot 1 = n!$$

Nach Satz 11 d) gibt es

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13983816$$

6-elementige Teilmengen der Menge $\{1, 2, 3, ..., 49\}$.

Um 6 Richtige bei 6 aus 49 mit einer mittleren Gewinnausschüttung von 500000 Euro zu tippen, müssen durchschnittlich ca. 14 Millionen Tipps zum Preis von 14 Millionen Euro abgegeben werden.

Satz 12. *Für* $1 \leqslant k \leqslant n$ *gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{(k-1)\cdot\ldots\cdot 1} + \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{k\cdot\ldots\cdot 1} \\
&= \frac{(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot[k+n-k]}{k\cdot\ldots\cdot 1} \\
&= \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot\ldots\cdot 1} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Die Binomialkoeffizienten bilden das *Pascalsche Dreieck*.