Aufgabe 1 (4 Punkte). (a) Zeigen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) Bestimmen Sie

$$\int_0^1 x^3 dx$$

durch Riemannsche Summen.

Aufgabe 2 (3 Punkte). (a) Definieren Sie, wann eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2$ stetig ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte). Schreiben Sie alle komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen in der Form $x = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

(a) $(5 + 6i)x = (4 + 17i)(4 + i)$,

(b) $(x + 1)^2 = 1 - i$,

(c) $\overline{x}(x - 2) = 4 - 2i$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). (a) Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

(b) Zeigen Sie, dass es ein $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ gibt mit $\tan(x) = 10^5$, ohne die Existenz der Umkehrfunktion arctan zu verwenden.

Aufgabe 5 (2 Punkte). Bestimmen Sie alle Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ der folgenden linearen Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte). Bestimmen Sie Stammfunktionen der folgenden Funktionen. Der Definitionsbereich von f ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}$.

(a) $f(x) = x\cos(x)$,

(b) $f(x) = (-6x^2 + 2x + 6)e^{2x}$,

(c) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-6}$,

(d) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$.

Aufgabe 7 (2 Punkte). Angenommen, V, W sind Vektorräume über eine Körper K. Definieren Sie die folgenden Begriffe:

(a) $f : V \to W$ ist eine lineare Abbildung,

(b) U ist ein Unterraum von V.

Aufgabe 8 (2 Punkte). Angenommen, V, W sind $\mathbb{C}$-Vektorräume, $(v_1, ..., v_n)$ ist eine Basis von V und $w_1, ..., w_n \in W$. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt mit $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.

Aufgabe 9 (4 Punkte). Richtig oder falsch:

(a) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -1 \end{pmatrix}$ ist linear.

(b) Der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ist definiert und gleich 2.

(c) Für alle $A \in M(n \times n, \mathbb{R}^n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ hat das Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$, wenn $b \in Bild(A)$.

(d) Jede lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat mindestens einen Eigenvektor.

Sie müssen Ihre Antworten in dieser Aufgabe nicht begründen. Für richtige Antworten gibt es einen Punkt, für falsche Antworten eine Minuspunkt und für unbeantwortete Fragen keine Punkte. Schlimmstenfalls können in dieser Aufgabe 0 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 10 (3 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nicht diagonalisierbar ist.