Lösungshinweise zur Probeklausur

Aufgabe 1.

a) Lösung mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang:

$\sum\limits_{k=0}^{0} k^3 = 0 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$, also stimmt die Aussage für $n = 0$.

Induktionsschritt:

Die Aussage sei gezeigt für $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = (k+1)^3 + \sum_{k=0}^{n} k^3$$

$$= (n+1)^3 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (Induktionsvoraussetzung)$$

$$= \frac{4(n+1)^3 + n^2(n+1)^2}{4} = \frac{\left[4(n+1) + n^2\right](n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{\left[n^2 + 4n + 4\right](n+1)^2}{4} = \frac{\left[(n+2)^2\right](n+1)^2}{4} = \frac{\left[((n+1)+1)^2\right](n+1)^2}{4}$$

Damit ist die Aussage nach dem Prinzip der vollständigen Induktion gezeigt.

$\square$

b) Wähle die Aufteilung des Intervalls $0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < ... < \frac{n-1}{n} < 1 \;\; n \in \mathbb{N}$ für die Berechnung von Untersummen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} k^3$$

$$\overset{nach\ Teil\ a)}{=} \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \frac{(n^2 - 2n + 1)n^2}{4n^4} = \frac{n^4 - 2n^3 + n^2}{4n^4}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{2}{n} + \frac{1}{4n^2} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad wenn \;\; n \to \infty$$

Aufgabe 2.

a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennt man dann stetig, wenn für jede konvergente Folge (x_n) von komplexen Zahlen mit $lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{C}$ gilt $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

b) ϵ-δ-Kriterium: Sei $x \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$, dann suche $\delta > 0$, so dass für y mit $|y - x| < \delta$ gilt: $|f(y) - f(x)| < \epsilon$. Wenn $|y - x| < \delta$, so ist

$$|f(y) - f(x)| = |y^2 - x^2| = |x + y||x - y| < \delta|x + y| = \delta(|2x + y - x|)$$
$$\overset{Dreiecksugl}{\leq} \delta(|2x| + |y - x|) < \delta(|2x| + \delta)$$

Nun kann man sehen, dass für $\delta = min(\frac{\epsilon}{2\cdot|2x|}, \frac{\epsilon}{2})$ für $x \neq 0$ und ansonsten $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ gilt $\delta(|2x| + \delta) = \delta|2x| + \delta^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4} < \epsilon$ ist, also hat man die gewünschte Aussage, wenn man dieses δ wählt.

(Bemerkung: Die allgemeine Strategie für ϵ-δ-Kriterium ist, sich unter der Voraussetzung $|y-x| < \delta$ von $|f(y)-f(x)|$ zu Ausdrücken, die man mithilfe dieser Voraussetzung abschätzen kann, vorzuarbeiten. Häufig ist dabei die Dreiecksungleichung nützlich.)

ACHTUNG: MIT DER GEGEBENEN AUFGABENSTELLUNG WÄRE DAS FOLGENDE EINFACHER UND NAHELIEGENDER. DIE AUFGABE WAR ABER EIGENTLICH NICHT SO GEDACHT. DURCH EXPLIZITEN VERWEIS AUF EPSILON-DELTA- ODER FOLGENKRITERIUM IN DER AUFGABENSTELLUNG KÖNNTE MAN DERARTIGE LÖSUNGEN AUS DER BETRACHTUNG ELIMINIEREN.

Alternative (einfachere) Lösung: Die Funktionen $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $g(x) = x$ und $h(x) = x$ sind stetig. (Nach Vorlesung, bzw. weil für jede konvergente Folge (x_n) von komplexen Zahlen mit $lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{C}$ folgt $lim_{n\to\infty} g(x_n) = lim_{n\to\infty} x_n = x = g(x)$ und genauso für h). Dann ist $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ als Produkt zweier stetiger Funktionen stetig.

Aufgabe 3.
a)

$$(5+6i)x = (4+17i)(4+i) \Leftrightarrow x = \frac{(4+17i)(4+i)}{5+6i} = \frac{16-17+4i+4\cdot 17i}{5+6i}$$
$$= \frac{-1+72i}{5+6i} = \frac{(-1+72i)(5-6i)}{(5+6i)(5-6i)} = \frac{(-1+72i)(5-6i)}{5^2+6^2}$$
$$= \frac{-5+6\cdot 72+72\cdot 5i+6i}{61} = \frac{427+366i}{61} = \frac{427}{61}+\frac{366}{61}i$$
$$= 7+6i$$

(Bem.: Mit etwas trickreicherer Rechnung, bei der man 72=61+11 einsetzt, wäre es in der Praxis evtl. einfacher als "brutal" wie hier gerechnet. Bemerke auch, dass wir schon im vorletzten Schritt die Anforderungen der Aufgabe erfüllt haben.)

b) Sei $x = a+ib,\ a,\ b \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$(x+1)^2 = 1-i \Leftrightarrow 1-i = [(a+1)+ib]^2 = (a+1)^2 + 2(a+1)bi - b^2$$

Re und Im beider Seiten müssen gleich sein, für Im bekommt man:

$$2(a+1)b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2(a+1)}$$

(Beachte, dass $2(a+1)=0$ durch die Gleichung ausgeschlossen ist.) Einsetzen in die Gleichung für Re:

$$1 = (a+1)^2 - b^2 = (a+1)^2 - \frac{1}{4(a+1)^2} \Leftrightarrow z^2 - z - \frac{1}{4} = 0 \ \ m.z = (a+1)^2$$

Quadratische Gleichung hat die Lösungen $z_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Da $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ scheidet eine Lösung aus und $(a+1)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Folglich entweder $a = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 1$ oder $a = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 1$. Im ersten Fall: $b = -\frac{1}{2(a+1)} = -\frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$, im zweiten $b = -\frac{1}{2(a+1)} = \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}$. Also gibt es die Lösungen:

$$x = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \cdot i$$

und

$$x = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} - 1 + \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \cdot i$$

c) Sei $x = a + ib,\ a,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\overline{x}(x-2) = 4 - 2i \Leftrightarrow (a - ib)\left[(a+ib) - 2\right] = 4 - 2i$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2a + 2bi = 4 - 2i$$

Man sieht sofort $b = -1$, und für den Realteil, mit Einsetzen b:

$$4 = a^2 + b^2 - 2a = a^2 + 1 - 2a = (a-1)^2 \Leftrightarrow (a = 3 \ \ oder \ \ a = -1)$$

Wir bekommen also die Lösungen:

$$x = 3 - i$$

und

$$x = -1 - i$$

4.

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann gibt es für $y \in \mathbb{R}$ im Fall $f(a) \leq y \leq f(b)$ und im Fall $f(b) \leq y \leq f(a)$ ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = y$.

b) Man weiß (Vorlesung) oder kann aus der Definition herleiten, dass

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tan(x) = \infty$$

Damit muss es aber ein $y \in (0, \frac{\pi}{2})$ geben mit $tan(y) > 10^5$. Außerdem ist $tan(0) = 0$, und tan ist auf $(0, \frac{\pi}{2})$ stetig. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es dann ein $x \in (0, y)$ mit $tan(x) = 10^5$. Insbesondere ist aber $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

$\square$

5.
Man erhält (durch Einsetzen von $y(x) = e^{\lambda x}$, oder weil man einfach weiß, dass die Koeffizienten dieselben sind) die sog. "charakteristische Gleichung"

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{\pm} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm 2i$$

Wg. $\lambda_+ \neq \lambda_-$ sind $e^{\lambda_+ x}$ und $e^{\lambda_- x}$ eine Basis des Raums der komplexen Lösungen. Die gesuchte Lösungsmenge ist also:

$$\{c_1 e^{(1+2i)x} + c_2 e^{(1-2i)x} | c_1, \;\; c_2 \in \mathbb{C}\}$$

6. (C jeweils die beliebige Integrationskonstante)
a) partielle Integration:

$$\int xcos(x)dx = xsin(x) - \int sin(x)dx = xsin(x) + cos(x) + C$$

b) (mehrfache) partielle Integration, beachte $\frac{d}{dx}\frac{1}{2}e^{2x} = e^{2x}$:

$$\begin{aligned}
&\int (-6x^2 + 2x + 6)e^{2x}dx = \int -6x^2e^{2x}dx + \int (2x+6)e^{2x}dx \\
&= -6x^2\frac{1}{2}e^{2x} - \left[\int -12x\frac{1}{2}e^{2x}dx\right] + (2x+6)\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}dx \\
&= -3x^2e^{2x} + \int 6xe^{2x}dx + (x+3)e^{2x} - \int e^{2x}dx \\
&= -3x^2e^{2x} + 6x\frac{1}{2}e^{2x} - \int 6\frac{1}{2}e^{2x}dx + (x+3)e^{2x} - \int e^{2x}dx \\
&= -3x^2e^{2x} + 3xe^{2x} + (x+3)e^{2x} - 4\int e^{2x}dx \\
&= -3x^2e^{2x} + 3xe^{2x} + (x+3)e^{2x} - 2e^{2x} + C
\end{aligned}$$

c) Die Lösungen von

$$x^2 + x - 6 = 0$$

sind $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$, also 2 und -3. Da x^2 Koeffizient 1 hat, bedeutet das $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$. Partialbruchzerlegung, suche $A,\ B \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $x \in \mathbb{R} - \{-3, 2\}$ (Def.bereich von f):

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^2+x-6} = \frac{1}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow A(x-2) + B(x+3) = 1 \\
&\Leftrightarrow (A+B)x = 0,\ \ 3B - 2A = 1 \Leftrightarrow (1)\ A + B = 0\ \ (2)\ -2A + 3B = 1
\end{aligned}$$

Letzteres Gleichungssystem hat die eindeutigen Lösungen $A = \frac{1}{5}$ und $B = -\frac{1}{5}$. Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2+x-6}dx = \int \frac{1}{5(x+3)}dx - \int \frac{1}{5(x-2)}dx \\
&= \frac{1}{5}log|x+3| - \frac{1}{5}log|x-2| + C
\end{aligned}$$

d) Erneute Partialbruchzerlegung, wir suchen $A,\ B \in \mathbb{R}$, so dass für $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{x}{x^2-4} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow A(x-2) + B(x+2) = x \\
&\Leftrightarrow (A+B)x + 2(B-A) = x \Leftrightarrow (1)\ A + B = 1\ \ (2)\ B - A = 0
\end{aligned}$$

Letzteres GLS wird eindeutig gelöst durch $A = B = \frac{1}{2}$. Damit:

$$\int \frac{x}{x^2-4}dx = \int \frac{1}{2(x+2)}dx + \int \frac{1}{2(x-2)}dx = \frac{1}{2}log|x+2| + \frac{1}{2}log|x-2| + C$$

7.
a) $f: V \to W$ ist eine lineare Abbildung genau dann, wenn
(1) Für beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$ gilt $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
(2) Für beliebige $x,\ y \in V$ gilt $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

b) U ist ein Unterraum von V wenn $U \subset V$, U nichtleer und
(1) Für beliebige $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in U$ gilt $\lambda x \in U$.
(2) Für beliebige $x,\ y \in U$ gilt $x + y \in U$.

8.
Eindeutigkeit: Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung mit der geforderten Eigenschaft, und $v \in V$. Da eine Basis vorliegt, gibt es eindeutige $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$. Da f linear, ist dann$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + ... + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$. Da demnach $f(v)$ für jedes $v \in V$ festgelegt ist, folgt Eindeutigkeit.

Existenz: Entsprechend dem ersten Teil definieren wir für $v \in V$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ die Abbildung $f : V \to W$ mit $f(v) = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n$. Dann gilt $f(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1, ..., n\}$.
Damit bleibt die Linearität von f nachzuweisen:
(1) Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ und $v \in V$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann: $f(\alpha v) = \lambda_1(\alpha w_1) + ... + \lambda_n(\alpha w_n) = (\lambda_1 \alpha) w_1 + ... + (\lambda_n \alpha) w_n = \alpha(\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n) = \alpha f(v)$
(2) Seien v, $w \in V$ mit $v = \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n$, $w = \kappa_1 v_1 + ... + \kappa_n v_n$, dann ist: $f(v + w) = f(\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n + \kappa_1 v_1 + ... + \kappa_n v_n) = f((\lambda_1 + \kappa_1) v_1 + ... + (\lambda_n + \kappa_n) v_n) = (\lambda_1 + \kappa_1) w_1 + ... + (\lambda_n + \kappa_n) w_n = (\lambda_1 w_1 + ... + \lambda_n w_n) + (\kappa_1 w_1 + ... + \kappa_n w_n) = f(v) + f(w)$.
f ist also linear.

$\square$

9.

a) falsch (Bem.: Man prüft leicht nach, dass sowohl die Verträglichkeit mit Vektoraddition als auch mit Skalarmultiplikation an der -1 in der zweiten Komponente "scheitert".)
b) wahr (Bem.: Die Matrix hat zwei Spaltenvektoren, die linear unabhängig sind. Wohldefiniert, weil Zeilenrang=Spaltenrang=Dimension des Bilds.)
c) wahr (Bem.: Das ist gerade so nach Definition des Bilds.)
d) falsch (Bem.: Das charakteristische Polynom könnte nur komplexe Nullstellen haben - etwa eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom $x^2 + 1$. Dann hat sie natürlich dazu keine Eigenvektoren in einem reellen Vektorraum wie $\mathbb{R}^2$.)

10.
Mit $A := \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ wird, unter Verwendung der Sarrusschen Regel, das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
det(A - \lambda E) &= det\left[\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \\
&= det\left[\begin{pmatrix} -3-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 1 \\ 10 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}\right] \\
&= (-3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) + 0 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 \cdot 0 - 10 \cdot (2-\lambda) \cdot 0 \\
&- 2 \cdot 0 \cdot (2-\lambda) - 0 \cdot 1 \cdot (-3-\lambda) \\
&= (-3-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda)
\end{aligned}$$

Man sieht sofort, dass diese Polynom die Nullstellen und somit die Matrix die Eigenwerte $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$ hat.
Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_1 = -3$ ist die Dimension des (mit diesem Eigenraum identischen) Kerns von $B := A - (-3)E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Die erste Zeile ist die Nullzeile. Die zweite Komponente des dritten Zeilenvektors ist 0, die des zweiten ist ungleich 0. Diese beiden Vektoren sind also linear unabhängig. Also bilden der zweite und dritte Zeilenvektor eine maximal linear unabhängige Teilmenge der Menge der Zeilenvektoren und $Rg(B) = 2$, also $dim(Kern(B)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Bild(B)) = 3 - Rg(B) = 3 - 2 = 1$.
Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$ ist die Dimension des (mit diesem Eigenraum identischen) Kerns der Matrix $C := A - 2E = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Der dritte Zeilenvektor ist das -2-fache des ersten, der zweite hat dritte Komponente ungleich 0, während der erste in dieser Komponente gleich 0 ist. Also bilden der erste und zweite Zeilenvektor eine maximal linear unabhängige Teilmenge der Menge der Zeilenvektoren und $Rg(C) = 2$, also $dim(Kern(C)) = dim(\mathbb{R}^3) - dim(Bild(C)) = 3 - Rg(C) = 3 - 2 = 1$.
Die Summe der Dimensionen der beiden Eigenräume ist 2 und damit kleiner als die Dimension des Vektorraums (3) also ist die Matrix nicht diagonalisierbar (keine Basis von $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A).

$\square$