41. (a)

$$S_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\frac{\beta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ \sin(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix}.$$

$$D_{\alpha-\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\sin(\alpha-\beta) \\ \sin(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) & -\cos(\alpha)\sin(-\beta) - \sin(\alpha)\cos(-\beta) \\ \cos(\alpha)\sin(-\beta) + \sin(\alpha)\cos(-\beta) & \cos(\alpha)\cos(-\beta) - \sin(\alpha)\sin(-\beta) \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen von $\cos(-\phi) = \cos(\phi)$ und $\sin(-\phi) = -\sin(\phi)$ erhalten wir $S_{\frac{\alpha}{2}} \cdot S_{\frac{\beta}{2}} = D_{\alpha-\beta}$.

(b) Wegen $AB(AB)^{-1} = E$ ist $B(AB)^{-1}$ das Inverse von A. Um zu zeigen, dass B invertierbar ist, argumentieren wir wie in Satz 7.19. Wegen $(AB)^{-1}AB = E_n$ ist $\mathrm{Kern}(B) = 0$, also ist die durch B definierte lineare Abbildung $f: K^n \to K^n$ ein Isomorphismus und $DM_{f^{-1}} = B^{-1}$.

42. (a)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A$$

(b)

$$A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{10} = A\,(A^{-1}BA)^{10}\,A^{-1}$$

$$(A^{-1}BA)^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

$$A\,(A^{-1}BA)^{10} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{10} & 3^{10} \\ 0 & -2^{10} & -2\cdot 3^{10} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

$$B^{10} = A\,(A^{-1}BA)^{10}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2^{10} & 3^{10} \\ 0 & -2^{10} & -2\cdot 3^{10} \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-2^{10} & 1-2^{10}+3^{10} \\ 0 & 2^{10} & 2^{11}-2\cdot 3^{10} \\ 0 & 0 & 3^{10} \end{bmatrix}$$

43. f ist beliebig oft differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Für $x < 0$ ist $f'(x) = 3x^2$ und für $x > 0$ ist $f'(x) = 0$.

Für $x = 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{x^3}{x} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Also ist f in 0 differenzierbar und $f'(0) = 0$. f' ist stetig in 0.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{für } x \leq 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

Für $x < 0$ ist $f''(x) = 6x$ und für $x > 0$ ist $f''(x) = 0$.

Für $x = 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{3x^2}{x} = 0,$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 0.$$

Also ist f' in 0 differenzierbar und $f''(0) = 0$. f'' ist stetig in 0.

$$f''(x) = \begin{cases} 6x & \text{für } x < 0, \\ 0 & \text{für } x > 0. \end{cases}$$

f'' ist nicht differenzierbar in 0, denn

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{6x}{x} = 6 \neq 0 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0}.$$

Also ist f nicht 3-fach differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$.

44. (a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

Wegen $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$ und $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ist $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Also ist $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$.

$\cos(x + \pi) = -\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(x)$.

(b) Für $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ist $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ nach Definition von π.

Für $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ ist $\sin'(x) = \cos(x) = \cos(-x) > 0$.

Für $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ ist $\sin'(x) = \cos(x) = -\cos(x - \pi)$ nach (a),

also $\sin'(x) < 0$.

(c) $$\tan(x+y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)}$$

$$\frac{\tan(x) + \tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)} = \frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(y)}{\cos(y)}}{1 - \frac{\sin(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)}{\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)} =$$

$$= \tan(x+y).$$

45. (a) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$

$$\cos(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4!} + r = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + r = \frac{13}{24} + r$$

für $r := \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = \underbrace{-\frac{1}{6!} + \overbrace{\frac{1}{8!}}^{>0}}_{<0} \underbrace{- \frac{1}{10!} + \overbrace{\frac{1}{12!}}^{>0}}_{<0} - \ldots$

Durch Vergleich der positiven und der negativen Summanden erhalten wir $-\frac{1}{6!} < r < 0$.

Wegen $\frac{1}{6!} < 10^{-2}$ ist $\cos(1) \approx \frac{13}{24}$ bis auf einen Fehler von höchstens $\pm 10^{-2}$.

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + s = 1 - 2 + \frac{2^4}{2\cdot 3\cdot 4} - \frac{2^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + s =$$

$$= -1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{45} + s = -\frac{11}{45} + s$$

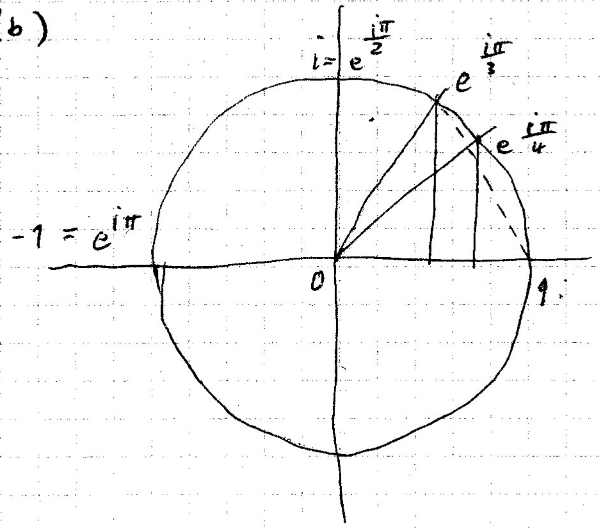
für $s := \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n}}{(2n)!} = \underbrace{\frac{2^8}{8!} \overbrace{- \frac{2^{10}}{10!}}^{<0}}_{>0} \underbrace{+ \frac{2^{12}}{12!} \overbrace{- \frac{2^{14}}{14!}}^{<0}}_{>0} + \ldots$

Durch Vergleich der positiven und negativen Summanden erhalten wir

$$0 < s < \frac{2^8}{8!} = \frac{2^8}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8} = \frac{2}{3^2\cdot 5\cdot 7} < 10^{-2}.$$

Also ist $\cos(2) \approx -\frac{11}{45}$ bis auf ein Fehler von höchstens $\pm 10^{-2}$.

(b)



Da $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ und $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = 1$,

ist $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

Da $(0, 1, e^{\frac{i\pi}{3}})$ ein gleichseitiges Dreieck bilden, ist $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

(c)

x	$f(x)$		
-1	$5\cos(-1) - 8$	< 0	
0	$5 - 1 = 4$	> 0	
1	$5\cos(1)$	> 0	nach (a)
2	$5\cos(2) + 1$	< 0	nach (a)
3	$5\cos(3) + 8$	> 0	

f ist stetig, da f die Summe einer Polynomfunktion und einer Potenzreihe ist. Nach dem Zwischenwertsatz hat f Nullstellen in den (offenen) Intervallen $(-1, 0)$, $(1, 2)$ und $(2, 3)$.