36. (a)

~~(a)~~ Angenommen $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u & v \\ w & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au+bw & av+bx \\ cu+dw & cv+dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{matrix} au+bw=1 \\ cu+dw=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} acu+bcw=1 \\ acu+adw=0 \end{matrix} \underset{II-I}{\Rightarrow} (ad-bc)w=-1$

$\Rightarrow ad-bc \neq 0$.

Dann ist

$$\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & ad-bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[nach Satz 7.19 ist die Inverse eindeutig]

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von U. ---

Für $K=\mathbb{R}$ und $a,b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ oder $b \neq 0$ ist $a^2+b^2>0$, wie in (a) ist $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ die Inverse zu $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ----

Für $K=\mathbb{C}$ ist $i^2+1=0$, also ist $\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ nicht invertierbar nach (a).

37. (a) Für $m,k,l \in \mathbb{Z}$:

- $m \sim_n m$ wegen $m - m = 0$,
- wenn $m \sim_n k$, dann ist $n \mid (m-k)$, also auch $n \mid (k-m)$,
- wenn $m \sim_n k$ und $k \sim_n l$, dann ist $n \mid (m-k)$ und $n \mid (k-l)$,

  also auch $n \mid (m-k)+(k-l) = m-l$.

(b) Für $x,y,z \in V$:

- $x \sim x$ wegen $x - x = 0 \in U$,
- wenn $x \sim y$, dann gilt $x - y \in U$, also auch

  $y - x = (-1) \cdot (x-y) \in U$,
- wenn $x \sim y$ und $y \sim z$, dann sind $x-y, y-z \in U$,

  also auch $x - z = (x-y)+(y-z) \in U$.

38. (a) $|\cdot|$ ist stetig in jedem $x \neq 0$, da die Funktionen

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ und $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x$ stetig sind.

$|\cdot|$ ist stetig in 0:

Angenommen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Zu zeigen: $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$.

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ brauchen wir ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für

alle $n \geq n_0$ $\quad ||x_n| - |0|| = |x_n| < \varepsilon$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

gibt es so ein n_0.

(b) sign ist stetig in jedem $x \neq 0$, da die konstanten Funktionen

mit Wert 1 und -1 stetig sind.

sign ist nicht stetig in 0:

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$, aber

$\lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq -1 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{sign}\left(-\frac{1}{n}\right)$.

(c) f ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, da die konstanten Funktionen

mit Werten in $\mathbb{Z}$ stetig sind.

f ist unstetig (= nicht stetig) in x für $x \in \mathbb{Z}$:

Wir betrachten die konstante Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Wert x.

Dann ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x = \lim_{n\to\infty} \left(x - \frac{1}{n}\right)$, aber

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = x \neq x - 1 = \lim_{n\to\infty} f\left(x - \frac{1}{n}\right)$.

39. (a) $q_n := \dfrac{\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|}{\left|\frac{x^n}{n}\right|} = \dfrac{n}{n+1} \cdot |x|$, $\lim_{n\to\infty} q_n = |x|$.

Wir wählen θ mit $|x| < \theta < 1$. Die Reihe der Beträge konvergiert nach dem Quotientenkriterium, also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ absolut.

(b) $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$, also wird $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n}$ beliebig groß.

$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1} > \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n}$, also wird $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n-1}$ beliebig groß.

(c) Wir teilen die Summanden zuerst nach Vorzeichen auf.
Wir wissen nach (b), dass $\sum_{n=1}^{k} \frac{-1}{2n}$ negative Werte von beliebig großem Betrag annimmt.

Umordnung: wähle abwechselnd:

- den nächsten positiven Summanden
- so viele der nächsten negativen Summanden, dass die Partialsumme so klein wird wie gewünscht (d.h. negativ von so großem Betrag wie gewünscht).

40. (a) 1 ist das größte Element von A, also ist $\sup(A) = 1$.
$-\frac{1}{2}$ ist das kleinste Element von A, also ist $\inf(A) = -\frac{1}{2}$.

(b) $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$. 2 ist das größte Element von A, also ist $\sup(A) = 2$.

$\inf(A) \geq 1$, da $1 + \frac{1}{n+1} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\inf(A) \leq 1$, denn wegen $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = 1$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1 < 1 + \frac{1}{n_0+1} < 1 + \varepsilon$.

(c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ streng monoton wachsend und surjektiv ist und $\exp(0) = 1$.
Also ist $A = \{-\exp(x) : x < 0\} = (-1, 0)$ und $\sup(A) = 0$, $\inf(A) = 1$.

Oder: $\sup(A) \leq 0$, da $-\exp(x) < 0$ für alle $x < 0$,
$\sup(A) \geq 0$ wegen $\lim_{n \to \infty} -e^{-n} = -\lim_{n \to \infty} e^{-n} = 0$,
$\inf(A) \geq -1$, da $-\exp(x) > -1$ für alle $x < 0$,
$\inf(A) \leq -1$, da $\exp(0) = 1$ und $\exp$ stetig ist, also

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} -\exp(x) = -\exp(0) = -1 .$$