31. (a) M_1 ist linear abhängig:

$$0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

M_2 ist linear unabhängig:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{lllll}
\iff & \alpha + 4\beta = 0 & \iff & \alpha + 4\beta = 0 & \iff \alpha = \beta = \gamma = 0 \\
 & 2\alpha + 5\beta = 0 & \text{II} - 2\cdot\text{I} & -3\beta = 0 & \\
 & 3\alpha + 6\beta + \gamma = 0 & \text{III} - 3\cdot\text{I} & -6\beta + \gamma = 0 &
\end{array}$$

M_3 ist linear abhängig:

sonst wäre M_3 eine Basis von $\mathcal{L}(M_3)$ und $\dim(\mathcal{L}(M_3)) = 4$.

Wegen $\mathcal{L}(M_3) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist $\dim(\mathcal{L}(M_3)) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$.

(b) B ist linear unabhängig:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}2\\6\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}3\\7\\0\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}4\\8\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{array}{llll}
\iff & \alpha + 2\beta + 3\gamma + 4\delta = 0 & \iff & 3\gamma + 4\delta = 0 \\
 & 5\alpha + 6\beta + 7\gamma + 8\delta = 0 & \text{II} - 2\cdot\text{I} & \gamma = 0 \\
 & \alpha + \beta = 0 & & \beta = 0 \\
 & \alpha = 0 & & \alpha = 0
\end{array}$$

$\iff \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Also ist $\dim(\mathcal{L}(B)) = 4$. Nach Satz 5.17 ist dann $\mathcal{L}(B) = \mathbb{R}^4$.

[oder: wenn $\mathcal{L}(B) \neq \mathbb{R}^4$, dann ergänzen wir B nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis C von $\mathbb{R}^4$. Wegen $B \subsetneq C$ wäre dann $\dim(\mathbb{R}^4) \geq 5$, ein Widerspruch.]

Wie im Basisaustauschsatz versuchen wir, einen Vektor durch $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu ersetzen und prüfen auf lineare Unabhängigkeit. Welche Vektoren Sie ausprobieren, bleibt Ihnen überlassen.

Wir versuchen zuerst, $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix}2\\6\\1\\0\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ zu ersetzen, dann erhalten wir aber eine linear abhängige Menge, da

$$\begin{pmatrix}4\\8\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir ersetzen $\begin{pmatrix}3\\7\\0\\0\end{pmatrix}$ durch $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ und erhalten C. C ist linear unabhängig:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\6\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}4\\8\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} \alpha + 2\beta + \gamma + 4\delta &= 0\\ 5\alpha + 6\beta + \gamma + 8\delta &= 0\\ \alpha + \beta &= 0\\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \underset{II-I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \gamma + 4\delta &= 0\\ 4\delta &= 0\\ \alpha = \beta &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

Dann ersetzen wir $\begin{pmatrix}1\\5\\1\\1\end{pmatrix}$ in C durch $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ und erhalten D. D ist linear unabhängig:

$$\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}2\\6\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix}4\\8\\0\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 2\beta + \gamma + 4\delta &= 0\\ 6\beta + \gamma + 8\delta &= 0\\ \alpha + \beta &= 0\\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \underset{II-I}{\Longleftrightarrow} \quad \begin{aligned} \gamma + 4\delta &= 0\\ 4\delta &= 0\\ \beta &= 0\\ \alpha &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \alpha = \beta = \gamma = \delta = 0.$$

D ist die gewünschte Basis von $\mathbb{R}^4$.

32. (a) f ist linear:

- $f(x_1+x_2, y_1+y_2) = (y_1+y_2, y_1+y_2, \sqrt{2}x_1+\sqrt{2}x_2) = f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)$
- für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y, \lambda y, \sqrt{2}\lambda x) = \lambda f(x,y)$

(b) f ist nicht linear, denn $f(0,0) = (0,0,-1) \neq 0$.

[Auch $g(x,y) := (x, y, xy)$ ist nicht linear, denn $g(0,1)+g(1,0) \neq g(1,1)$]

(c) f ist linear:

- $f(u+u', v+v', w+w', x+x') = u+u' - w - w' = f(u,v,w,x) + f(u',v',w',x')$
- für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(\lambda u, \lambda v, \lambda w, \lambda x) = \lambda u - \lambda w = \lambda f(u,v,w,x)$

(d) f ist linear

(e) f ist linear:

- $f(x+y) = \mathrm{Re}(x+y) + \mathrm{Im}(x+y) = \mathrm{Re}(x) + \mathrm{Re}(y) + \mathrm{Im}(x) + \mathrm{Im}(y) = f(x) + f(y)$
  nach Aufgabe 23 (a)
- für $\lambda, a, b \in \mathbb{R}$ und $x = a+ib$ ist $\lambda x = \lambda \cdot (a+ib) = \lambda a + i\lambda b$
  und damit $\mathrm{Re}(\lambda x) = \lambda a$, $\mathrm{Im}(\lambda x) = \lambda b$. Also
  $f(\lambda x) = \mathrm{Re}(\lambda x) + \mathrm{Im}(\lambda x) = \lambda \mathrm{Re}(x) + \lambda \mathrm{Im}(x) = \lambda f(x)$.

(f) f ist linear:

- $f(g+h) = (g+h)(4) = g(4) + h(4) = f(g) + f(h)$
- für $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $f(\lambda g) = (\lambda g)(4) = \lambda \cdot g(4) = \lambda \cdot f(g)$.

33. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \iff \begin{matrix} x + 3y + 4z = 0 \\ 2x + 3y + 5z = 0 \end{matrix} \iff$

$\underset{\mathrm{II}-\mathrm{I}}{\iff} \begin{matrix} x + 3y + 4z = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix} \underset{\mathrm{I}-\mathrm{III}}{\iff} \begin{matrix} 3y + 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{matrix} \iff$

$\iff x = y = -z$.

Also ist $(1,1,-1)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$ und $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 1$.

$\dim(\mathrm{Bild}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3) - \dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$ nach dem Dimensionssatz (Satz. 6.17).

Wir nennen die Zeilenvektoren von $DM(g)$ v_1, v_2, v_3, v_4.

Dann ist $\mathrm{Bild}(g) = \mathcal{L}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $v_1 = v_2 + v_3$.

Die Vektoren v_2, v_3, v_4 sind linear unabhängig wegen $v_2 \notin \mathcal{L}(v_3, v_4)$, $v_3 \notin \mathcal{L}(v_2, v_4)$ und $v_4 \notin \mathcal{L}(v_2, v_3)$.

Also ist $\{v_2, v_3 v_4\}$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(g)$ und $\dim(\mathrm{Bild}(g)) = 3$.

$\dim(\mathrm{Kern}(g)) = \dim(\mathbb{R}^5) - \dim(\mathrm{Bild}(g)) = 2$ nach dem Dimensionssatz.

34.

(a) Wir schreiben $e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{C}^3$ als Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{9} \cdot (v_1 - 2v_2 - 4i v_3), \\ e_2 &= \tfrac{1}{9} \cdot (4v_1 + v_2 + 2i v_3), \\ e_3 &= \tfrac{1}{9} \cdot (-2v_1 + 4v_2 - i v_3). \end{aligned}\right\} \text{ das erhält man jeweils durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.}$$

Also ist $f(e_1) = \frac{1}{9} \cdot (1-2+4,\ 1-4+12) = \frac{1}{3} \cdot (1,3)$,

$f(e_2) = \frac{1}{9} \cdot (4+1-2,\ 4+2-6) = \frac{1}{3} \cdot (1,0)$,

$f(e_3) = \frac{1}{9} \cdot (-2+4+1,\ -2+8+3) = \frac{1}{3} \cdot (1,3)$.

$$\Rightarrow \mathrm{DM}(f) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Für jeden Vektor $v \in \mathbb{C}^2$ ist $f: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$,

$$f(a v_1 + b v_2 + c v_3) = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \cdot v$$

eine solche lineare Abbildung. Es gibt also unendlich viele solche Abbildungen.

35. (a) $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right)$

$- \frac{1}{4}\left(e^{2x} - 2e^{x}e^{-x} + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}(2+2) = 1.$

(b) $\cosh(x+y) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} + e^{-x-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{y} + e^{-x}e^{-y}\right).$

$\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) = \frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{y}+e^{-y}\right)$

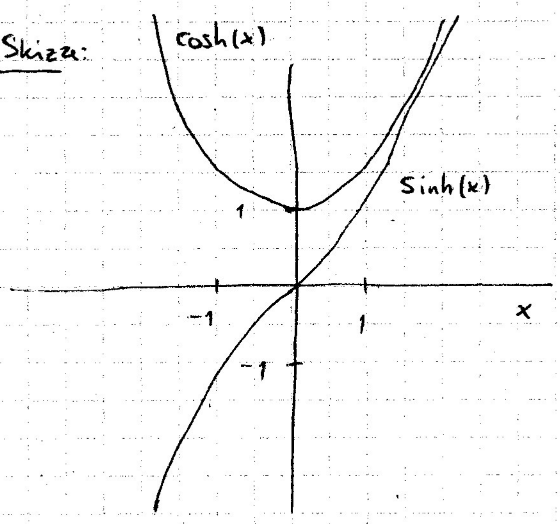
$+ \frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{y}-e^{-y}\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{x}e^{y} + 2e^{-x}e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{y} + e^{-x}e^{-y}\right).$

(c) $\sinh(x+y) = \frac{1}{2}\left(e^{x+y} - e^{-x-y}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{y} - e^{-x}e^{-y}\right)$

$\cosh(x)\sinh(y) + \sinh(x)\cosh(y) = \frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)\left(e^{y}-e^{-y}\right)$

$+ \frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)\left(e^{y}+e^{-y}\right) = \frac{1}{4}\left(2e^{x}e^{y} - 2e^{-x}e^{-y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{x}e^{y} - e^{-x}e^{-y}\right).$

Skizze:



$\cosh(x) = \cosh(-x)$

$\sinh(x) = -\sinh(-x)$