26. $tv_1 - tv_2 + (2t-1)v_3 = 0$

$tv_1 - v_2 + v_3 = 0$

$3tv_1 - (t+2)v_2 + (2t+1)v_3 = 0$

$\underset{\text{III} - \text{I} - 2\cdot\text{II}}{\Longleftrightarrow}$ $tv_1 - tv_2 + (2t-1)v_3 = 0$

$tv_1 - v_2 + v_3 = 0$

$\underset{\text{I} - \text{II}}{\Longleftrightarrow}$ $(1-t)v_2 + (2t-2)v_3 = 0$

$tv_1 - v_2 + v_3 = 0$

Fall 1 $t = 1$

$v_1 - v_2 + v_3 = 0$

Basis: $(1,1,0), (1,0,-1)$; mit $e_1 = (1,0,0)$ Basis von $\mathbb{R}^3$;

$\dim(U_t) = 2$.

Fall 2 $t \neq 1$

$v_2 - 2v_3 = 0$ $\underset{\text{I}+\text{II}}{\Longleftrightarrow}$ $v_2 - 2v_3 = 0$

$tv_1 - v_2 + v_3 = 0$ $tv_1 - v_3 = 0$.

Basis: $(1, 2t, t)$; mit e_2, e_3 Basis von $\mathbb{R}^3$;

$\dim(U_t) = 1$.

27. (a) $U_1 := \mathcal{L}(a,b,c,d,e)$ und $U_2 := \mathcal{L}(v_1, v_2, \dots, v_6)$ sind Unterräume von V mit $U_2 \leq U_1$, also $\dim(U_2) \leq \dim(U_1)$ (nach Satz 5.16). Nach dem Basisergänzungssatz (Satz 5.11, für $r=0$) gibt es Basen $B_1 \subseteq \{a, .., e\}$ und $B_2 \subseteq \{v_1, \dots, v_6\}$ von U_1 bzw. U_2. Also ist $\dim(U_2) \leq \dim(U_1) \leq 5$. Wenn $v_1, .., v_6$ linear unabhängig wären, dann wäre $\{v_1, .., v_6\}$ eine Basis von U_2, also $\dim(U_2) = 6$, ein Widerspruch.

(b) $0 = 0 + 0 \in U_1 + U_2$. Angenommen, $x = u_1 + u_2 \in U_1 + U_2$, $y = v_1 + v_2 \in U_1 + U_2$, $u_1, v_1 \in U_1$, $u_2, v_2 \in U_2$ und $\lambda \in K$. Dann ist $x + y = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) \in U_1 + U_2$ und $\lambda x = \lambda(u_1 + u_2) = \lambda u_1 + \lambda u_2 \in U_1 + U_2$.

28. (a) Für $i \leq k$ ist $\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{x^i}{n^i} =$

$$= \frac{n!}{(n-i)!\,n^i}\cdot\frac{x^i}{i!} = \frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-i+1}{n}\cdot\frac{x^i}{i!}.$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n} = \ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-i+1}{n} = 1$ ist

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i} = \frac{x^i}{i!} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i} = \sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}.$$

(b) Wegen den in (a) berechneten Grenzwerten gibt es ein $n_0 > k$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\left|\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i} - \sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}\right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\binom{n}{k+1}\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{x^k}{(k+1)!}\right| < \varepsilon,$$

also $\left|\binom{n}{k+1}\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\right| > \varepsilon$.

Also ist $(1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\frac{x^i}{n^i} + \binom{n}{k+1}\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}} \geq \sum_{i=0}^{k}\frac{x^i}{i!}$.

(c) $$\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n}\right)^n = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{(n-1)n}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n\left(1+\frac{2}{n}\right)^n =$$

$$= \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2-n}\right)^n = e^2 e^2 = e^4.$$

29. (a) Wegen $e \geq 2$ ist $2^n \leq e^n$ und

$e^{-n} = \frac{1}{e^n} \leq \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}$ (für $n \geq 1$). Außerdem ist $e^{-n} \geq 0$,

also ist $\lim\limits_{n \to \infty} e^{-n} = 0$.

(b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < y$ ist $x^2 < y^2$,

$-x^2 > -y^2$ und $e^{-x^2} > e^{-y^2}$.

(c) $e^{ax} \leq e^{x+b} \iff e^{ax-x-b} \leq 1 \iff$

$ax - x - b \leq 0 \iff (a-1)x \leq b \iff x \leq \frac{b}{a-1}$.

(d) $\exp(\bar{x}) = 1 + \bar{x} + \frac{\bar{x}^2}{2} + \ldots = \lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=0}^{k} \frac{\bar{x}^n}{n!} =$

$= \lim\limits_{k \to \infty} \overline{\sum\limits_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!}} \underset{23(c)}{=} \overline{\exp(x)}$.

30. (a) $a := (1+|x|)^2(1+|y|)^2 \geq 1$, wir wollen

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2 a^k}{k!} = 0$ zeigen.

$\lim\limits_{k\to\infty} \frac{k^2}{k(k-1)} = 1$. Es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(k-3)! \geq a^k$

für alle $k \geq k_0$, also ist $\frac{a^k}{(k-2)!} = \frac{a^k}{(k-3)!} \cdot \frac{1}{k-2} \leq \frac{1}{k-2}$ und

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k^2 a^k}{k!} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k(k-1)} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{a^k}{(k-2)!} = 0.$$

(b) Quotientenkriterium:

$$\frac{\frac{8(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{8n^3}{3^n}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \leq \frac{1}{3}\cdot\frac{64}{27} < 1 \quad \text{für } n \geq 3.$$

(es genügt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 < 1$).

Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{8n^3}{3^n}$.

(c) $$\frac{5n^2-3n+2}{n+1} = \frac{5n(n+1)-8n+2}{n+1} = 5n - \frac{8n+2}{n+1} \leq 5n$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{5n^2-3n+2} \geq \frac{1}{5n}.$$

Da die Partialsummen der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n}$ beliebig groß werden, divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5n^2-3n+2}{n+1}$.

(d) Majorantenkriterium:

$$\frac{n^6 \cdot 2^n}{n^{4n}\cdot n!^5} \leq \frac{2^n}{n^{3n}\cdot n!^5} \leq \frac{1}{n^{2n}\cdot n!^5} \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für } n \geq 6.$$

Also konvergiert die Reihe.