21. (a) $U = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 : v_1 + iv_2 = 0 \}$,

$V = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{C}^3 : 2v_1 - v_2 + iv_3 = 0 \}$.

Für $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(v_1, v_2, v_3) \in U \cap V \iff \begin{array}{l} v_1 + iv_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 + iv_3 = 0 \end{array} \underset{\text{II} \cdot i}{\iff} \begin{array}{l} v_1 + iv_2 = 0 \\ 2iv_1 - iv_2 - v_3 = 0 \end{array} \iff$$

$$\underset{\text{I}+\text{II}}{\iff} \begin{array}{l} v_1 + iv_2 = 0 \\ (1+2i)v_1 - v_3 = 0 \end{array}$$

Also ist $U \cap V = \{ (v_1, iv_1, (1+2i)v_1) : v_1 \in \mathbb{C} \}$ und $\{ (1, i, 1+2i) \}$ ist eine Basis von $U \cap V$.

(b) $U = \{ (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{Q}^3 : 2v_1 + 3v_2 = v_3 \} = \{ (v_1, v_2, 2v_1 + 3v_2) : v_1, v_2 \in \mathbb{Q} \}$

Die Vektoren $x := (v_1, 0, 2v_1)$ und $y := (0, v_2, 3v_2)$ erzeugen U und sind linear unabhängig, also ist $\{x, y\}$ eine Basis von U.

(c) U ist ein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$U \neq \emptyset$, denn die konstante Funktion mit Wert 0 ist in U.

Für $f, g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $(f+g)(1) = f(1) + g(1) = 0$ und $(\lambda f)(1) = \lambda \cdot f(1) = 0$, also sind $f+g, \lambda f \in U$.

V ist kein Unterraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist in V, aber $(-1) \cdot f \notin V$, da $((-1) \cdot f)(1) = -f(1) = -1$.

22. (a) $\{(1,0),(0,1)\}$ ist eine Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$ (die kanonische Basis). Die Vektoren in $B := \{(1,0),(0,1),(i,0),(0,i)\}$ sind linear unabhängig wegen $i \notin \mathbb{R}$, also ist B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{C}^2$.

(b) $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0 \iff \alpha(v_1 + iv_2 + iv_3) + \beta(v_1 - v_2 + iv_3) + \gamma(v_1 - iv_2 + v_3) = 0 \iff$

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ i\alpha - \beta - i\gamma &= 0 \\ i\alpha + i\beta + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind

$$\iff_{\text{III}-\text{II}} \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ i\alpha - \beta - i\gamma &= 0 \\ (i+1)\beta + (i+1)\gamma &= 0 \end{aligned} \iff \begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ i\alpha - \beta - i\gamma &= 0 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \iff$$

$\iff \alpha = 0,\ \beta + i\gamma = 0,\ \beta + \gamma = 0 \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$

Also sind w_1, w_2, w_3 linear unabhängig über $\mathbb{C}$.

23. (a) Re, Im sind additiv wegen $(a+ib)+(c+id) =$

$= (a+c) + i(b+d)$.

$\overline{(a+ib)+(c+id)} = \overline{(a+c)+i(b+d)} = (a+c) - i(b+d) =$

$= \overline{(a+ib)} + \overline{(c+id)}$.

(b) $x_n = a_n + ib_n$, $x = a+ib$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} |x - x_n| = 0 \iff$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(a-a_n)^2 + (b-b_n)^2} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \left((a-a_n)^2 + (b-b_n)^2 \right) = 0$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} (a-a_n) = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} (b-b_n) = 0 \iff$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.

(c) $x_n = a_n + ib_n$, $x = a+ib$.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b \iff$

$\iff \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(-b_n) = -b \iff \lim\limits_{n\to\infty} \overline{x_n} = \overline{x}$.

(d) $\dfrac{10-5i}{4+3i} = \dfrac{(10-5i)(4-3i)}{16+9} = \dfrac{40-15-20i-30i}{25} = 1-2i$

(e) $(a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 1+i$, $a,b \in \mathbb{R} \implies$

$\implies a^2 - b^2 = 1,\ 2ab = 1 \implies a^2 - \dfrac{1}{4a^2} = 1,\ b = \dfrac{1}{2a} \implies$

$\implies 4a^4 - 4a^2 - 1 = 0 \implies a^2 = \dfrac{4 \pm \sqrt{32}}{8} = \dfrac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$

$\underset{a\in\mathbb{R}}{\implies} a^2 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2} \implies a+ib = \pm\left(\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}} + i \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}} \right)$.

Oder: $1+i = \sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\implies a+ib = \pm \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$.

(f) $x_0 = -2$ ist eine Lösung.

$$\begin{array}{l} (x^3 + (7-2i)x^2 + (15-9i)x + 10-10i) : (x+2) = x^2 + (5-2i)x + (5-5i) \\ \underline{-(x^3 + 2x^2)} \\ \quad (5-2i)x^2 + (15-9i)x + 10 - 10i \\ \quad \underline{-((5-2i)x^2 + (10-4i)x} \\ \qquad (5-5i)x + 10 - 10i \end{array}$$

Für $a, b \in \mathbb{R}$ ist $(a+ib)^2 + (5-2i)(a+ib) + 5-5i = 0 \iff$

$\iff a^2 - b^2 + 2abi + 5a + 2b - 2ai + 5bi + 5 - 5i = 0$

$\iff a^2 - b^2 + 5a + 2b + 5 = 0, \quad 2ab - 2a + 5b - 5 = 0$

$\iff a^2 - b^2 + 5a + 2b + 5 = 0, \quad (2a+5)b = 2a+5$

$\iff$ (1) $a^2 - b^2 + 5a + 2b + 5 = 0, \quad a = -\frac{5}{2}$, oder

(2) $a^2 + 5a + 6 = 0, \quad b = 1$

Im Fall (1) ist $\frac{25}{4} - b^2 - \frac{25}{2} + 2b + 5 = 0 \Rightarrow$

$b^2 - 2b + \frac{25-20}{4} = 0 \Rightarrow b = \frac{2 \pm \sqrt{4-5}}{2}$ im Widerspruch zu $b \in \mathbb{R}$.

Also ist die Gleichung äquivalent zu:

$a^2 + 5a + 6 = 0, \quad b = 1$

$\iff a = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = -\frac{5}{2} \pm \frac{1}{2}, \quad b = 1$

Die Lösungen sind $-2, \ -3+i, \ -2+i$.

24. (a) $$\frac{n}{5(n+3)} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{-1}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$ ist $\lim \frac{n}{5(n+3)} = \frac{1}{5}$,

also ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{5(n+3)}$ divergent.

(b) - (c) : Die Reihen konvergieren nach dem Quotientenkriterium:

(b) $$\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} \quad \text{für } n \geq 2 .$$

(c) $$\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

Wegen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \geq 2$ ist $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leq \frac{1}{2}$.

(d) $$\frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} = \frac{(n+1)^4}{3\, n^4} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4 \leq \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{4}\right)^4 < 1$$

für $n \geq 4$.

25. (a) $a+(-a)=0$ nach K3. Wenn $a+c=0$, dann ist

$(a+c)+(-a) \underset{K1,K4}{=} (a+(-a))+c \underset{K3}{=} c$ und

$(a+c)+(-a) = 0+(-a) \underset{K2,K4}{=} -a$, also $c=-a$.

(b) $(-a)\cdot(-b) \underset{K1,K9,K3,K4}{=} \big((-a)\cdot(-b)+a\cdot(-b)\big)+(a\cdot b - a\cdot b)$

(wegen $a\cdot(-b)+ab \underset{K9,K3}{=} a((-b)+b) = a\cdot 0 = 0$)

$\underset{K3}{=} ((-a)+a)\cdot(-b) \underset{K3,K4}{=} 0\cdot(-b) = 0$.

Also $(-a)\cdot(-b) = a\cdot b$ (durch Addition von $a\cdot b$, K1, K2, K3).

(c) $f_a : K\setminus\{0\} \to K\setminus\{0\}$, $f_a(x) = x\cdot a$, $a>0$.

Injektiv: $x\cdot a = y\cdot a \Rightarrow x \underset{K5,K7}{=} (x\cdot a)\cdot a^{-1} = (y\cdot a)\cdot a^{-1} \underset{K5,K7}{=} y$.

Surjektiv: $g_a(x\cdot a^{-1}) = (x\cdot a^{-1})\cdot a \underset{K5,K7,K8}{=} x$

Strikt monoton wachsend: $x<y \underset{Ak1}{\Rightarrow} y-x>0 \underset{Ak2}{\Rightarrow} (y-x)\cdot a \underset{K9}{=}$

$= y\cdot a - x\cdot a > 0 \underset{Ak1}{\Rightarrow} x\cdot a < y\cdot a$.

(d) Angenommen, $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, ^{-1}, 0, 1, <)$ wäre ein geordneter Körper.

Dann ist $i>0$ oder $i<0$ nach O3,

$-1 = i^2 \underset{(b)}{=} (-i)^2 > 0$ nach Ak2,

$1 = 1^2 \underset{(b)}{=} (-1)^2 > 0$ nach Ak2 und damit $-1<0$ nach Ak2

Das widerspricht O1, O2.