Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
29. 11. 2010
Blatt 7

Übungen zur Mengenlehre

1. Es sei $F \subset \mathbb{R}$ eine überabzählbare, abgeschlossene Menge, ferner $F = P \cup A$ eine Zerlegung von F in eine perfekte Menge P und eine dazu disjunkte abzählbare Menge A, wie sie nach dem Satz von Cantor-Bendixson existiert. Zeigen Sie, dass dann $P = F^{(\aleph_1)}$ und $A = F - F^{(\aleph_1)}$ gilt.

2. Sei $(X, <)$ eine halbgeordnete Menge. Zeigen Sie: Dann ist $\mathrm{cf}(X)$ die kleinste Ordinalzahl α, so dass eine $<$-konfinale Abbildung $f : \alpha \to X$ existiert.

3. Sei $f : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ eine streng monoton wachsende, stetige Funktion der Ordinalzahlen auf sich selbst. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, also eine Ordinalzahl α mit $f(\alpha) = \alpha$ existiert. Folgern Sie die Existenz eines $\beta \in \mathrm{Ord}$ mit $\beta = \aleph_\beta$.

4. Es bezeichnet $[\mu]^\kappa$ die Menge aller Teilmengen von μ mit Kardinalität κ. $C \subset [\mu]^\kappa$ heiße konfinal, falls zu jedem $x \in [\mu]^\kappa$ ein $y \in C$ existiert mit $x \subset y$. Zeigen Sie: Ist $\kappa \leq \mu$ eine unendliche Kardinalzahl und C konfinal in $[\mu]^\kappa$, so ist $|([\mu]^\kappa)| = |C| \cdot 2^\kappa$.

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 13. 12. 2010 in der Vorlesung