Mathematisches Institut
der Universität Bonn
S. Geschke, M.Carl

WS 10/11
22. 11. 2010
Blatt 6

# Übungen zur Mengenlehre

1. Zeigen Sie folgende Aussagen:
(a) Ist $\alpha$ eine abzählbare Limesordinalzahl, so existiert eine streng monoton wachsende Folge $\langle \beta_i | i \in \omega \rangle$ von Ordinalzahlen mit $\alpha = \sup\{\beta_i | i \in \omega\}$.
(b) Ist $(X, <)$ eine wohlgeordnete Menge, $Y \subseteq X$, so ist
$otp(Y, <) \leq otp(X, <)$.

2. (a) Zeigen Sie: Zu jeder abzählbaren Ordinalzahl $\alpha$ existiert eine streng monoton wachsende Funktion $f : \alpha \to \mathbb{R}$, d.h.: Jede abzählbare Ordinalzahl kann ordnungserhaltend in die reellen Zahlen eingebettet werden.
(b) Gilt diese Aussage auch noch, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{Q}$ ersetzt?

3. Zeigen Sie ohne Benutzung des Auswahlaxioms, dass jede endliche Familie nichtleerer Mengen eine Auswahlfunktion besitzt.

4. (a) Zeigen Sie: Es existiert eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der reellen Ebene, die von jeder Geraden in genau zwei Punkten geschnitten wird.
(Tipp: Wählen Sie eine Wohlordnung mit minimalem Ordnungstyp auf der Menge der Geraden und definieren Sie $X$ dann rekursiv.)
(b) Existiert eine Teilmenge $X \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ der reellen Ebene, die von jedem Kreis in genau 3 Punkten geschnitten wird?

Bitte wenden!

Zusatzaufgabe für Interessierte: Der dunkle Herrscher Sauron hat $\omega$ viele Hobbits gefangen genommen und spielt mit ihnen folgendes Spiel: Die Hobbits werden in einer Reihe vom Ordnungstyp $\omega$ aufgestellt, mit Blick in Richtung $\omega$. Dann wird jedem ein roter oder ein grüner Hut aufgesetzt. Jedem Hobbit ist bekannt, an welcher Position der Reihe er steht, und er sieht die Hutfarben aller Hobbits, die vor ihm stehen, seine eigene oder die der hinter ihm stehenden aber nicht. Am Anfang der Reihe beginnend fragt Sauron nun jeden Hobbit nach seiner Hutfarbe. Währenddessen kann kein Hobbit hören, was ein anderer sagt, noch auf eine andere Weise mit den anderen kommunizieren. Wer korrekt antwortet, wird freigelassen, wer sich irrt, kommt in die Suppe. Die Hobbits dürfen sich aber vor Spielbeginn auf eine Strategie einigen und dabei das Auswahlaxiom benutzen. Zeigen Sie, dass durch geeignete Wahl der Strategie alle bis auf endlich viele Hobbits gerettet werden können.
(Tipp: Betrachten Sie auf ${}^{\omega}\{0,1\}$ die Äquivalenzrelation
$s \sim t \leftrightarrow card(\{i \in \omega | s(i) \neq t(i)\}) < \omega$ und benutzen Sie AC, um ein Repräsentantensystem für die Äquivalenzklassen zu finden.)

Jede Aufgabe wird mit 8 Punkten bewertet.

Abgabe: am 01. 12. 2010 in der Vorlesung